

JAN GAJEWSKI I KRYSTIAN ZORYCHTA
Warszawa

PROBLEM PRZYDATNOŚCI ROZWIĄZAŃ EKONOMETRYCZNYCH ZBLIŻONYCH DO OPTYMALNEGO PRZY REORGANIZACJI PRZEDSIĘBIORSTW ROLNICZYCH

Uwagi wstępne

Do bardziej znanych i popularnych metod optymalizacyjnych, które można stosować przy reorganizacji przedsiębiorstw rolniczych, należą metody programowania liniowego, czyli metody związane z optymalizacją modeli liniowych.

Głównym zarzutem wysuwany przeciwko stosowaniu tych metod przy organizacji względnie reorganizacji jest to, że jako rozwiązanie optymalne konkretnego modelu liniowego otrzymujemy zwykle jeden jedyny układ liczb — czyli jeden jedyny plan reorganizacyjny, który w wielu przypadkach może być mało przydatny w praktyce rolniczej.

W opracowaniu naszym chcemy, z jednej strony, przedstawić wyniki podjętej próby dalszego przystosowania optymalnego rozwiązania modelu liniowego dotyczącego reorganizacji przedsiębiorstw rolniczych do potrzeb praktyki, z drugiej zaś wykazać, jaki może mieć wpływ „uelastycznienie” tego rozwiązania na budowę programu i rolę człowieka mającego podejmować decyzje na podstawie analizy rezultatów liczbowych tak skonstruowanego modelu.

Strona matematyczna naszych wywodów potraktowana będzie bardzo elementarnie i obrazowo, a wszystkie istotne elementy matematyczne tego opracowania oparte są na znanych dotychczas publikacjach naukowych z tej dziedziny¹.

¹ **S. I. Gass:** Linear Programming (Methodes and Applications) Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London — 1959.

G. Hadley: Linear Programming; Addison-Wesley Publishing Comp. Inc. Reading, Massachusetts USA, London, England — 1962.

G. Zoutendijk: Methodes of Feasible Directions (A Study in linear and non-linear programming), Elsevier Publishing Comp., Amsterdam, London, New York, Price — 1960.

G. B. Dantzig: Linear Programming and Extensions; Princeton University Press, Princeton, New Jersey — 1963.

Interpretacja geometryczna metody programowania liniowego

Przeważnie każdy model liniowy sprowadza się w praktyce do układu równań liniowych w następującej postaci:

$$(1) \quad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = f_m \end{array}$$

gdzie $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ oraz $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, \dots, f_m \geq 0$.

Jeżeli do układu (1) dołączymy funkcję kryterium

$$(2) \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

którą zamierzamy maksymalizować na zbiorze rozwiązań układu (1), to otrzymamy klasyczny problem programowania liniowego. Rozwiązanie tego problemu możemy uzyskać przy pomocy postępowania znanego w matematyce pod nazwą metody „simpleks”.

Podamy teraz w sposób obrazowy interpretację geometryczną tej metody. Rozpatrzmy fikcyjny przykład nawiązujący do tematyki rolniczej. Przyjmijmy, że mamy gospodarstwo rolne o powierzchni 100 ha, dysponujące w ciągu roku 250 jednostkami robocizny oraz 150 jednostkami kapitału. Dla wygody — ziemię, pracę i kapitał będziemy nazywali środkami produkcji. Przypuśćmy, że w gospodarstwie tym możemy uprawiać cztery rośliny: A, B, C, D. Zużycie środków produkcji w odpowiednich jednostkach na 1 ha każdej rośliny przedstawia poniższe zestawienie:

Środki produkcji	Rośliny			
	A	B	C	D
ziemia	1	1	1	1
praca	2	3	4	1
nakłady	1	3	2	3

Oprócz powyższych danych musimy znać jeszcze współczynniki określające zysk osiągany z 1 ha każdej uprawianej rośliny. Przyjmijmy, że będą to następujące współczynniki:

Rośliny	A	B	C	D
Zysk z 1 ha	8	10	9	9

Problem polega na określeniu optymalnej (ze względu na zysk) struktury produkcji roślinnej w danym gospodarstwie w rozpatrywanym okresie czasu. Jeżeli x_1, x_2, x_3, x_4 będą oznaczać nieznane obszary gruntów ornych (z tych 100 ha), które zamierzamy przeznaczyć pod

uprawę kolejnych roślin A, B, C, D — to zysk z gospodarstwa można będzie określić formułą:

$$(3) \quad z = 8x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4$$

Zastanówmy się teraz, jakie warunki muszą być spełnione przy uprawie powyżej podanych roślin, których nieznane powierzchnie uprawy oznaczamy kolejno przez x_1, x_2, x_3, x_4 . Oczywiście wszystkie niewiadome muszą być nieujemne, ich suma nie może przekroczyć 100 ha, a zużyte przy uprawie poszczególnych roślin ilości pracy i kapitału nie mogą być większe odpowiednio od 250 i 150. Zależności te można wyrazić kolejno następującym układem nierówności:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 100 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 250 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 150 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Zadanie polega na znalezieniu takich wielkości x_1, x_2, x_3, x_4 , które maksymalizowałyby funkcję zysku (3) i jednocześnie spełniały układ nierówności (4).

Przypuśćmy na moment, że rozważaliśmy tylko pierwsze trzy rośliny A, B, C , i że zmienna x_4 nie występuje ani w funkcji zysku, ani w nierównościach (4).

Każdą trójkę liczb x_1, x_2, x_3 , która spełnia układ

$$(5) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 100 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 250 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 150 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

można traktować jako trzy współrzędne punktu w przestrzeni. Ponieważ takich trójek spełniających układ (5) jest na ogół nieskończenie wiele, więc odpowiadające im punkty przestrzeni tworzyć będą zbiór o nieskończenie wielu punktach. Można udowodnić, że zbiór ten jest wielościannem wypukłym, przy czym dość często każda nierówność układu (5) tworzy jedną ściankę tego wielościannu¹. Zbiór ten można zatem wyobrazić sobie w postaci np. kopuły pokrytej wielokątnymi płytkami. Punkty, w których styka się kilka płytek — nazywamy wierzchołkami, zaś linie styku dwóch płytek — krawędziami.

Dla każdej ustalonej wartości zysku, funkcja zysku przyjmuje postać płaszczyzny, która w miarę zmian wartości z przesuwają się w przestrzeni równolegle albo w kierunku wzrostu zysku, albo odwrotnie. My musimy znaleźć taki punkt naszej kopuły (leżący w jej wnętrzu lub na powierzchni), aby przechodząca przez niego płaszczyzna zysku była przesunięta możliwie najdalej w kierunku wzrostu zysku. Oczywiście taki punkt będzie leżał na powierzchni kopuły i to prawdopodobnie w którymś z wierzchołków. Dalej nie można przesunąć płaszczyzny zysku, bo straciłaby styczność z naszą kopułą. Jeżeli płaszczyzna zysku jest równoległa do którejś ze ścian zawierającej punkt optymalny, to oczywiście wszystkie punkty tej ścianki będą optymalne.

¹ Ściślej mówiąc zbiór punktów spełniających odpowiadające tej nierówności równanie, oraz pozostałe nierówności.

Analogiczną własność sformułować można dla krawędzi. Wyobraźmy sobie teraz, że znamy współrzędne któregoś z wierzchołków kopuły. Rozpatrzmy wszystkie krawędzie wychodzące z tego wierzchołka. Każda z nich prowadzi na ogół do innego wierzchołka. Wybieramy tę krawędź, która — jeżeli będziemy się po niej przesuwali do następnego wierzchołka — da nam największy przyrost zysku. Po tej krawędzi przechodzimy do następnego wierzchołka. W ten sposób przechodzimy od wierzchołka do wierzchołka uzyskując za każdym razem możliwie duży przyrost zysku. Jeżeli z jakiegoś wierzchołka żadna krawędź nie prowadzi w kierunku wzrostu zysku, to znaczy, że osiągnęliśmy już wierzchołek optymalny. Tak można by w grubym uproszczeniu zobrazować ogólny zarys metody „simpleks”.

W tej interpretacji celowo odrzuciliśmy zmienną x_4 z naszego przykładu, aby sprowadzić rozważania do przestrzeni trójwymiarowej, w której jeszcze jako tako działa nasza wyobraźnia. Rozważania te są słuszne również w przestrzeniach o wyższych wymiarach. Cały ten proces można sformułować w terminach algebry liniowej, dzięki czemu możliwe jest dokonywanie konkretnych obliczeń, np. na elektronowych maszynach cyfrowych. W wyniku obliczeń możemy otrzymać współrzędne jednego optymalnego wierzchołka i ewentualnie współrzędne wszystkich wierzchołków leżących na drodze, po której posuwaliśmy się w kierunku rozwiązania optymalnego.

Matematyczne formuły metody „simpleks” oraz omówienie wyników jakie można uzyskać przy jej zastosowaniu

Po omówieniu w sposób obrazowy działania metody „simpleks” przedstawimy w dużym skrócie algebraiczne jej ujęcie.

Niech będzie dane pewne konkretne rozwiązanie dopuszczalne układu (1), którego m współrzędnych wyznacza układ równań liniowych algebraicznych

$$(6) \quad a_{i\alpha_1} x_{\alpha_1} + a_{i\alpha_2} x_{\alpha_2} + \dots + a_{i\alpha_m} x_{\alpha_m} = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

zaś pozostałe współrzędne równe są zeru.

Układ (6) zawiera m kolumn macierzy układu (1) ($n > m$) stanowiących bazę dopuszczalną. Takie rozwiązanie układu (1) nazywamy rozwiązaniem podstawowym (nie więcej niż m współrzędnych większych od zera).

Każde rozwiązanie podstawowe odpowiada jednemu i tylko jednemu wierzchołkowi wypukłego wielościanu rozwiązań¹.

Niech teraz dla każdego wskaźnika kolumny $1 \leq j \leq n$ takiego, że $j \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ układy wielkości $y_{\alpha_1 j}, y_{\alpha_2 j}, \dots, y_{\alpha_m j}$ wyznaczone będą przez następujące układy równań:

$$(7) \quad a_{i\alpha_1} y_{\alpha_1 j} + a_{i\alpha_2} y_{\alpha_2 j} + \dots + a_{i\alpha_m} y_{\alpha_m j} = a_{ij} \\ i = 1, 2, \dots, m; \quad 1 \leq j \leq n$$

¹ Przy założeniu, że układ jest niezdegenerowany i zawiera bazę.

Dla każdej kolumny o wskaźniku j takim, że $1 \leq j \leq n$ oraz $j \neq a_1, a_2, \dots, a_m$ określamy następującą wielkość d_j

$$(8) \quad d_j = c_{a_1} y_{a_1 j} + c_{a_2} y_{a_2 j} + \dots + c_{a_m} y_{a_m j} - c_j$$

Z podstawowych twierdzeń metody „simpleks” wynika¹, że jeżeli istnieje taki wskaźnik $j = k$, że $d_k < 0$, to można znaleźć inne rozwiązanie podstawowe, dla którego odpowiadająca mu wartość funkcji kryterium będzie większa od wartości funkcji dla poprzedniego rozwiązania podstawowego (przy założeniu, że funkcja kryterium jest ograniczona na zbiorze rozwiązań układu (1)).

Współrzędne tego rozwiązania określają następujące formuły²:

$$(9) \quad x'_{a_i} = x_{a_i} - r_k \cdot y_{a_i k} \quad \text{dla } 1 \leq i \leq m \text{ oraz } i \neq l$$

$$x'_k = r_k$$

gdzie

$$(10) \quad r_k = \min_{1 \leq i \leq m} \left[\frac{x_{a_i}}{y_{a_i k}}; \text{ dla } y_{a_i k} > 0 \right] = \frac{x_{a_l k}}{y_{a_l k}}$$

(w przypadku, gdy wszystkie $y_{a_i k} \leq 0$, to funkcja kryterium jest nieograniczona na zbiorze rozwiązań układu (1). Pozostałe x'_i o wskaźnikach $1 \leq j \leq n$ równe są zeru.

Nowa wartość funkcji kryterium wyrazi się w sposób następujący:

$$(11) \quad z' = z - r_k \cdot d_k$$

Ponieważ $d_k < 0$, zaś $r_k > 0$, wobec tego wartość funkcji kryterium powiększy się o składnik $|r_k \cdot d_k|$.

W ten sposób możemy przechodzić od jednego rozwiązania podstawowego do drugiego, powiększając za każdym razem wartość funkcji kryterium.

Jeżeli dla jakiegoś rozwiązania podstawowego wszystkie d_j dla $1 \leq j \leq n$ są większe albo równe zeru,

$$(12) \quad d_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

to rozwiązanie takie jest rozwiązaniem optymalnym.

Aby otrzymać możliwie maksymalny przyrost funkcji kryterium, określamy d_k w sposób następujący:

$$d_k = \min_{1 \leq j \leq n} d_j; \text{ dla } d_j < 0$$

Oczywiście nie zawsze będzie to największy z możliwych przyrostów, bo może istnieć taka kolumna o numerze q , dla której, mimo iż $d_k < d_q < 0$, to jednak $|r_q \cdot d_q| > |r_k \cdot d_k|$.

Dla lepszego zrozumienia powyższych formuł, warto przeprowadzić pewną, choćby uproszczoną interpretację ekonomiczną niektórych symboli. Przypuśćmy, że dysponujemy m środkami produkcji, $W_1, W_2, \dots$,

¹ S. I. Gass: Linear Programming (Methodes and Applications). Mc Graw — Hill Book Company, Inc.; New York, Toronto, London — 1958.

² Podane powyżej formuły nie mają charakteru dynamicznego, a jedynie obrazują przejście od jednego do drugiego rozwiązania podstawowego.

W_m , przy czym z możliwych do produkcji n roślin $R_1, R_2, \dots, R_n$, aktualnie produkujemy ich m , to jest $R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, \dots, R_{\alpha_m}$ ($n > m$). Nazwijmy zestaw roślin produkowanych, bazą. Chcemy teraz powiększyć globalny zysk bez zmiany technologii, a jedynie przez wprowadzenie do produkcji bardziej opłacalnych roślin. Niech R_j oznacza dowolną z nieprodukowanych aktualnie roślin, zaś $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_m}$ ilości roślin bazy. Przypuśćmy, że ilości środków produkcji są stałe i że są w pełni wykorzystywane przez bazę. Wprowadzenie do produkcji rośliny R_j tak, aby w dalszym ciągu wszystkie środki były wykorzystane, spowoduje zmiany na ogół we wszystkich ilościach roślin bazy. Współczynniki $y_{\alpha_1 j}, y_{\alpha_2 j}, \dots, y_{\alpha_m j}$ mówią nam po ile jednostek każdej z roślin bazy należy poświęcić na jedną jednostkę rośliny R_j . Są to pewnego rodzaju współczynniki przeliczeniowe, jednej jednostki R_j na pewną liczbę jednostek każdej z roślin bazy. Oczywiście na ogół będą w bazie takie rośliny, które nie tylko nie wniosą nic do produkcji jednostki R_j , ale produkcja ich dzięki wprowadzeniu R_j powiększy się. Wtedy odpowiednie $y_{\alpha_i j}$ będzie mniejsze od zera. Przypuśćmy, że znamy współczynniki $y_{\alpha_i j}$ dla każdej z roślin niebazowych. Niech c oznacza zysk jednostkowy z rośliny R_j dla $j = 1, 2, \dots, n$. Przeprowadźmy teraz bilans strat i zysków powstałych na skutek wprowadzenia do produkcji jednej jednostki rośliny R_j . Jedna jednostka R_j daje nam zysk c_j . Ale jednocześnie tracimy zysk z $y_{\alpha_1 j}$ jednostek rośliny R_{α_1} , $y_{\alpha_2 j}$ jednostek rośliny R_{α_2} i tak dla wszystkich roślin bazy, gdyż wprowadzenie jednej jednostki R_j odbyło się kosztem wszystkich roślin bazy. W sumie utracony zysk na roślinach bazy wynosi:

$$c_{\alpha_1} y_{\alpha_1 j} + c_{\alpha_2} y_{\alpha_2 j} + \dots + c_{\alpha_m} y_{\alpha_m j}$$

Zatem bilans zysku i straty na jednostkę rośliny R_j wynosi:

$$b_j = c_j - (c_{\alpha_1} y_{\alpha_1 j} + c_{\alpha_2} y_{\alpha_2 j} + \dots + c_{\alpha_m} y_{\alpha_m j}).$$

Oczywiście, jeżeli bilans ten jest dodatni, to opłaca się roślinę R_j wprowadzić do produkcji, jeśli zaś jest ujemny, to nie będziemy jej wprowadzali. Co więcej, wybierać będziemy na ogół tę roślinę niebazową, dla której bilans jest największy (dodatni). Łatwo zauważyć, że d_j występujące w formułach metody „simpleks” jest bilansem zaopatrzonego znakiem minus, to znaczy $d_j = -b_j$. Przypuśćmy, że wybraliśmy roślinę z największym bilansem dodatnim. Niech to będzie roślina R_k . Powstaje problem, w jakiej ilości należy ją produkować? Oczywiście w możliwie jak największej. Oznaczmy tę ilość przez r_k . Ilości roślin bazowych ulegną zmianie w zależności od r_k , mianowicie x_{α_i} zmniejszy się o liczbę jednostek rośliny R_{α_i} poświęconych na umożliwienie produkcji jednej jednostki rośliny R_k , pomnożonej przez liczbę jednostek rośliny R_k . Mamy zatem nowe poziomy produkcji

$$x'_{\alpha_i} = x_{\alpha_i} - y_{\alpha_i k} \cdot r_k.$$

Oczywiście wszystkie x'_α muszą być nieujemne, zatem r_k wybieramy tak, aby było możliwie jak największe i aby spełnione były warunki

$$x_{\alpha_i} - y_{\alpha_i k} \cdot r_k \geq 0.$$

Taki wybór zabezpiecza formuła (10). Łatwo sprawdzić, że zysk globalny powiększy się o bilans zysku na jednostkę R_k , pomnożony przez liczbę jednostek R_k . To ostatnie stwierdzenie wyraża wzór (11). Tymi uwagami zakończymy omawianie formuł matematycznych metody „simpleks”.

Wróćmy jednak do tego, co zostało powiedziane na wstępie. Podkreśliśmy tam, że jedno rozwiązanie optymalne, które otrzymujemy w wyniku obliczeń, na ogół nas nie zadowala, zwłaszcza w modelach rolniczych. Zawsze będziemy się starali mieć więcej wariantów planu nawet kosztem pewnej części zysku, o której wiemy, że jest na pewno nieistotna z punktu widzenia praktycznego. Uzyskujemy bowiem bardziej elastyczny proces planowania.

Częściowo możemy to osiągnąć rozpatrując kilka ostatnich rozwiązań ze ścieżki, którą postępujemy stosując metodę „simpleks”. Rozwiązań tych jest niewiele i na ogół nie są różnorodne, ale mamy już w każdym razie dwa etapy w drodze do otrzymania jak największej liczby informacji o rozwiązaniu optymalnym programu liniowego, mianowicie:

- 1) możliwość uzyskania planu optymalnego,
- 2) możliwość rozpatrywania kilku ostatnich rozwiązań podstawowych, które można uzyskać z końcowych iteracji metody „simpleks”, dla których wartość funkcji kryterium niewiele różni się od jej wartości optymalnej.

W dalszych częściach tego opracowania pokażemy, w jaki sposób można otrzymać jeszcze bardziej różnorodny zbiór rozwiązań bliskich optymalnemu.

Przystosowanie metody „simpleks” do otrzymania dodatkowego zbioru rozwiązań bliskich optymalnemu

Aby otrzymać jeszcze bardziej różnorodny zbiór rozwiązań bliskich optymalnemu, proponujemy rozbudować algorytmy obliczeniowe metody „simpleks” o następujący fragment. Przypuśćmy, że osiągnęliśmy rozwiązanie optymalne, dla którego zysk (maksymalny) wynosi z_0 . Niech p będzie procentem maksymalnego dopuszczalnego odchylenia od optymalnej wartości zysku, jakiej spodziewamy się po realizacji planu. Rozważany teraz wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka optymalnego. Po każdej z nich przesuwamy się w kierunku zmniejszenia zysku dochodząc do wierzchołka leżącego na drugim końcu. Jeżeli wartość zysku w tym punkcie nie jest mniejsza od $z_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$, to obli-

czamy współrzędne tego wierzchołka i dołączamy go do zbioru rozwiązań bliskich optymalnego. W ten sposób możemy otrzymać sąsiednie wierzchołki leżące dookoła wierzchołka optymalnego. Może być ich tyle, ile wynosi różnica między liczbą niewiadomych n a liczbą równań m w układzie (1). Jeżeli to nam nie wystarcza — możemy w analogiczny sposób „cofać się” z każdego z otrzymanych wierzchołków bliskich optymalnemu i dla każdego z nich otrzymać znów powyższego rzędu ilość rozwiązań bliskich optymalnemu (o ile tylko spełniać będą warunek, że zysk nie będzie mniejszy o więcej niż o p %).

Po dokonaniu takich dwu kroków możemy otrzymać już liczbę rozwiązań rzędu $\frac{1}{2} (n - m)^2$. Oczywiście liczba ta zależeć będzie zarówno od n , m i p , jak i od właściwości macierzy.

Na przykładzie naszej kopuły można to sobie wyobrazić w następujący sposób: ustalamy zysk na poziomie $z_1 = z_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ i prowadzimy płaszczyznę zysku dla z_1 . Płaszczyzna ta przetnie nam kopułę odcinając jej skrawek. Każdy punkt tej odciętej części uważamy za rozwiązanie bliskie optymalnemu, a opisane powyżej postępowanie pozwala określić wierzchołki odciętej części.

Rozważania te można ująć w następujące formuły matematyczne. Zakładamy, że osiągnęliśmy rozwiązanie optymalne (mamy wtedy dla wszystkich rozpatrywanych $1 \leq j \leq n$, $d_j \geq 0$). Dla każdego $j \neq a_1, a_2, \dots, a_m$ obliczamy r_j ze wzoru (10), a następnie odpowiadające mu rozwiązanie podstawowe wg formuły (9). Optymalna wartość funkcji kryterium na podstawie wzoru (11) zmniejszy się każdorazowo o składnik $r_j \cdot d_j$, gdyż tym razem wszystkie $d_j \geq 0$.

Przy dokonywaniu powyższych operacji mogą zdarzyć się dwa przypadki: 1° $|r_j \cdot d_j| \leq \frac{p}{100} z_0$; wtedy uważamy nowo otrzymane rozwiązanie podstawowe za bliskie optymalnemu;

2° $|r_j \cdot d_j| > \frac{p}{100} z_0$. Z teorii metody „simpleks” wiadomo, że jeśli tylko $0 \leq v_j \leq r_j$, to nowe rozwiązanie

$$(14) \quad \begin{aligned} x'_{a_i} &= x_{a_i} - v_j y_{a_i j} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x'_j &= v_j \end{aligned}$$

jest również rozwiązaniem układu (1), chociaż nie koniecznie podstawowym.

Możemy zatem przyjąć

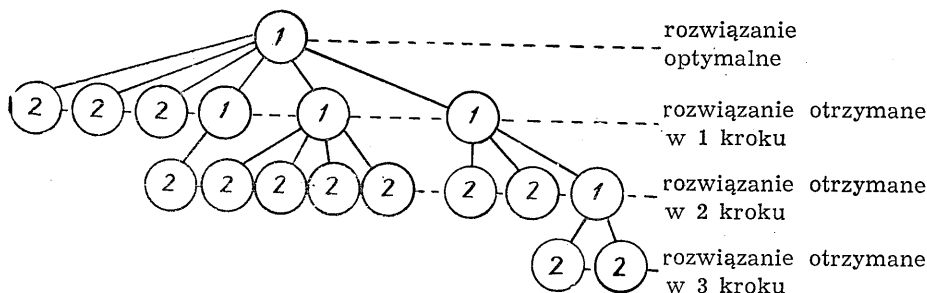
$$(15) \quad v_j = \frac{p \cdot z_0}{100 d_j}$$

(gdzie, jak łatwo zauważyć, $v_j \leq r_j$) i tak otrzymane rozwiązanie (14) włączyć do zbioru rozwiązań bliskich optymalnemu. W przypadku problemu niezdegenerowanego, tak otrzymane rozwiązanie podstawowe będzie miało dokładnie $m + 1$ współrzędnych większych od zera.

W drugim kroku rozpatrujemy wszystkie rozwiązanie podstawowe otrzymane w przypadku 1°. Każde z nich traktujemy tak, jak poprzednio rozwiązanie optymalne i dla każdego powtarzamy opisane poprzednio obliczenia, rozważając za każdym razem przypadek 1° i 2° oraz tylko te kolumny, dla których $d_j \geq 0$. Cały sposób postępowania powtarzamy tak długo, aż w którymś z kroków nie otrzymamy żadnego rozwiązania z przypadku 1°.

Tak dokonując obliczeń można określić wszystkie rozwiązania określające wierzchołki odciętej części (płaszczyznę $z = z_1$) wypukłego wielościanu rozwiązań.

Stosując powyższy sposób postępowania możemy uzyskać rozwiązania, z których niektóre będą się powtarzały — ale te możemy zawsze odrzucić. Postępowanie to można zilustrować graficznie w następujący sposób:



(Poszczególne punkty tego wykresu oznaczają różne rozwiązania bliskie optymalnemu; 1 — rozwiązania otrzymane w przypadku 1°, 2 — rozwiązania otrzymane w przypadku 2°).

Wróćmy teraz do podanego przez nas przykładu gospodarstwa fikcyjnego, którego funkcja kryterium podana została za pomocą formuły (3), a warunki ograniczające zostały wyrażone za pomocą układu nierówności (4).

Najpierw układ nierówności (4) przedstawimy w postaci układu równań wprowadzając tzw. zmienne dopełniające (swobodne).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_1 &= 100 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + s_2 &= 250 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + s_3 &= 150 \end{aligned}$$

Zmienne s_1 , s_2 , s_3 interpretuje się w tym przypadku jako niewykorzystanie odpowiednich środków produkcji.

Rozwiązując ten przykład metodą „simpleks” otrzymujemy następujący plan optymalny:

$$\begin{aligned} x_1 &= 75 \text{ ha} & x_3 = x_4 = s_1 = s_3 &= 0 \\ x_2 &= 25 \text{ ha} & \text{zysk} &= 850 \text{ jednostek} \\ s_2 &= 25 \text{ jedn. pracy.} \end{aligned}$$

Następnie stosując opisany w poprzednich częściach tej pracy algorytm pozwalający na uzyskanie rozwiązań bliskich optymalnemu, których nie jesteśmy w stanie otrzymać dokonując obliczeń wg znanych algorytmów metody „simpleks” — przedstawimy poszczególne fazy prowadzenia obliczeń. Dla ułatwienia oznaczamy $s_1 = x_5$, $s_2 = x_6$, $s_3 = x_7$. Założmy, że dopuszczamy 2% odchylenia od optymalnej wartości funkcji celu ($p = 2$).

Rozwiązanie optymalne wyznaczone zostało przez bazę złożoną z kolumn: 1, 2, 6, czyli przez układ równań.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 100 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_6 &= 250 \\ x_1 + 3x_2 &= 150 \end{aligned}$$

Określamy teraz współrzędne y_{α_j} dla pozostałych kolumn: 3, 4, 5, 7. Otrzymamy je w wyniku rozwiązania następujących czterech układów równań.

$$\begin{array}{rcl} y_{13} + y_{23} & = & 1 \\ 2y_{13} + 3y_{23} + y_{63} & = & 4 \\ y_{13} + 3y_{23} & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} y_{14} + y_{24} & = & 1 \\ 2y_{14} + 3y_{24} + y_{64} & = & 1 \\ y_{14} + 3y_{24} & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} y_{15} + y_{25} & = & 1 \\ 2y_{15} + 3y_{25} + y_{65} & = & 0 \\ y_{15} + 3y_{25} & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} y_{17} + y_{27} & = & 0 \\ 2y_{17} + 3y_{27} + y_{67} & = & 0 \\ y_{17} + 3y_{27} & = & 1 \end{array}$$

Wartości na y_{α_j} są następujące

	y_{1j}	y_{2j}	y_{6j}
kolumna $j = 3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
kolumna $j = 4$	0	1	-2
kolumna $j = 5$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
kolumna $j = 7$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Odpowiadające kolumnom wielkości d_j obliczamy wg formuły (8). Dla przykładu podamy dwa obliczenia:

$$d_3 = 8 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{3}{2} - 9 = 0$$

$$d_4 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 9 = 1.$$

Pozostałe współczynniki d_j wynoszą kolejno: $d_5 = 7$, $d_7 = 1$.

Obliczymy teraz wielkości r_j dla kolumn 3, 4, 5, 7 wg formuły (10). Dla przykładu podamy jedynie tylko dwa pełne obliczenia

$$r_3 = \min \left[\frac{75}{0,5}, \frac{25}{0,5}, \frac{25}{1,5} \right] = \frac{25}{1,5} = \frac{50}{3} = \frac{x_6}{y_{63}}$$

$$r_4 = \min \left[\frac{25}{1} \right] = \frac{25}{1} = 25 = \frac{x_2}{y_{24}}$$

Łatwo sprawdzić, że $r_5 = 50 = \frac{x_1}{y_{15}}$ oraz, że $r_7 = 50 = \frac{x_2}{y_{27}}$.

Badamy teraz warunki $r_j \cdot d_j \leq \frac{p}{100} \cdot z_0$. Mamy $\frac{p}{100} \cdot z_0 = 17$

$$\begin{array}{rcl} \text{oraz } r_3 \cdot d_3 & = & 0 < 17 \\ r_4 \cdot d_4 & = & 25 > 17 \\ r_5 \cdot d_5 & = & 350 > 17 \\ r_7 \cdot d_7 & = & 50 > 17 \end{array}$$

Jedynie kolumna o nr 3 spełnia warunek przypadku 1°. Obliczamy teraz nowe rozwiązanie podstawowe o bazie złożonej z kolumn 1, 2, 3 wg formuły (9) i włączamy je do zbioru rozwiązań podstawowych bliskich optymalnemu. Dla poszczególnych zmiennych uzyskujemy następujące wartości:

$$x'_3 = \frac{50}{3}; x'_1 = 75 - \frac{50}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{200}{3}; x'_2 = 25 - \frac{50}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{50}{3};$$

$$x'_4 = x'_5 = x'_6 = x'_7 = 0.$$

Wartości funkcji kryterium nie ulegną zmianie, gdyż

$$z' = 850 - \frac{50}{3} \cdot 0 = 850.$$

Pozostałe kolumny spełniają warunek przypadku 2°. Obliczamy dla nich wielkości v_i wg formuły (15)

$$v_4 = \frac{2 \cdot 850}{100 \cdot 1} = 17$$

$$v_5 = \frac{2 \cdot 850}{100 \cdot 7} = \frac{17}{7}$$

$$v_7 = \frac{2 \cdot 850}{100 \cdot 1} = 17$$

oraz odpowiednio nowe rozwiązania.

Podstawiając np. współczynnik v_4 zamiast v_i we wzorach (14), otrzymujemy:

$$x'_1 = 75 - 17 \cdot 0 = 75$$

$$x'_2 = 25 - 17 \cdot 1 = 8$$

$$x'_6 = 25 + 17 \cdot 1 = 59$$

$$x'_4 = 17; x'_3 = x'_5 = x'_7 = 0$$

Wartość funkcji celu dla tego rozwiązania wynosi 833.

Podobnie obliczamy dalsze dwa rozwiązania przy pomocy wielkości v_5 i v_7 , są one następujące:

$$\text{dla } v_5 = \frac{17}{7}: x'_1 = \frac{999}{14}, x'_2 = \frac{367}{14}, x'_6 = \frac{401}{14}, x'_5 = \frac{17}{7}$$

$$\text{dla } v_7 = 17: x'_1 = \frac{167}{2}, x'_2 = \frac{33}{2}, x'_6 = \frac{67}{2}, x'_7 = 17$$

W dalszym ciągu dokonujemy następnego kroku, w którym rozważamy wszystkie rozwiązania podstawowe uzyskane w wyniku pierwszego kroku. Takie rozwiązanie jest tylko jedno, o bazie złożonej z kolumn 1, 2, 3. Powtarzamy dla tej bazy analogiczne rozumowanie, jak poprzednio, włączając kolejno do bazy jedynie te kolumny, dla których $d_i \geq 0$.

W ten sposób systematycznie, krok za krokiem, rozszerzamy zbiór wierzchołków odciętej części wielościanu. Gdybyśmy otrzymali w wyniku dokonania pierwszego kroku więcej niż jedno rozwiązanie określone według 1°, to podobne rachunki przeprowadzilibyśmy oddzielnie dla wszystkich tych rozwiązań.

Oczywiście obliczenia, które tutaj podaliśmy przykładowo, można wykonać w sposób o wiele bardziej prosty przy pomocy znanych algorytmów metody „simpleks”.

Ciekawsze rozwiązania bliskie optymalnemu przy $p = 3$, zestawione zostały w poniższej tabeli.

Warianty	Rośliny				Niewykorzystane środki produkcji			Wielkość zysku	% odchylenia od optimum
	A	B	C	D	ziemia	praca	kapitał		
1	75,0	25,0	0,0	0,0	0,0	25,0	0,0	850	0,0
2	66,7	16,7	16,7	0,0	0,0	0,0	0,0	850	0,0
3	60,0	0,0	30,0	10,0	0,0	0,0	0,0	840	1,18
4	75,0	0,0	25,0	0,0	0,0	0,0	25,0	825	2,94
5	75,0	0,0	0,0	25,0	0,0	75,0	0,0	825	2,94

Nie znaczy to jednak, że mamy do wyboru tylko te 5 planów. Każdy z nich odpowiada pewnemu wierzchołkowi odciętej części wielościanu. Ponieważ ta odcięta część zawiera także inne punkty, między innymi wewnętrzne, postaramy się w takim razie przedstawić sposób umożliwiający ich obliczenie, a tym samym powiększenie zbioru rozwiązań bliskich optymalnemu.

Dalsze rozwiązania bliskie optymalnemu, które można uzyskać poprzez wypukłą kombinację liniową rozwiązań dotychczas otrzymanych

Rozwiązania omówione w tytule tego rozdziału otrzymujemy w sposób następujący. Ustalamy najpierw odpowiadające kolejnym wariantom rozwiązań współczynniki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$. Współczynniki te mogą być dowolne, z tym jednak, że muszą one być nieujemne i ich suma musi być równa jedności.

Niech np. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$; $\lambda_2 = \frac{1}{3}$; $\lambda_3 = 0$; $\lambda_4 = \frac{1}{6}$; $\lambda_5 = 0$.

Mnożymy teraz współrzędne wariantu przez odpowiadający temu wariantowi współczynnik, następnie sumujemy każdą kolumnę tak otrzymanej tabeli. Możemy to również zrobić dla kolumny zysku i % odchylenia od optimum.

W wyniku tak przeprowadzonej operacji otrzymujemy zupełnie nowy wariant planu, przy czym w kolumnie zysku, jak i w procencie odchylenia otrzymujemy poprawne dla tego wariantu wielkości. Dla ustalonych wyżej współczynników kombinacji otrzymamy wariant 6, przedstawiony w poniższym zestawieniu.

Warianty	Rośliny				Niewykorzystane środki produkcji			Wielkość zysku	% odchylenia od optimum
	A	B	C	D	ziemia	praca	kapitał		
6	72,2	18,0	9,7	0,0	0,0	12,5	4,2	845,8	0,49
7	63,3	8,3	23,3	5,0	0,0	0,0	0,0	845,0	0,59
8	75,0	0,0	20,0	5,0	0,0	15,0	20,0	825,0	2,94

Kombinując wariant 2 i 3 podany na str. 84 przy współczynnikach $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ otrzymujemy wariant 7, który zapewnia nam uprawę wszystkich roślin przy wyeliminowaniu wszelkich oszczędności środków produkcji. Natomiast kombinacja wariantów 4 i 5 (str. 84), gdy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, a $\lambda_4 = \frac{4}{5}$ i $\lambda_5 = \frac{1}{5}$ daje nam wariant 8, pozwalający zaoszczędzić 15 jednostek pracy i 20 jednostek kapitału.

Dobierając w zależności od aktualnych potrzeb współczynniki kombinacji, możemy budować plany, z których każdy będzie się różnił od poprzedniego, ale jednocześnie nie wyjdzie poza granice założonego odchylenia od wyniku optymalnego.

Tego rodzaju rozbudowanie algorytmów metody „simpleks” o dodatkowe elementy pozwoliło nam posunąć się o dwa dalsze etapy w powiększeniu liczby informacji wynikających z analizy liniowego zadania dotyczącego reorganizacji gospodarstwa.

Po pierwsze — mamy teraz możliwości uzyskania rozwiązań wyznaczających wszystkie wierzchołki pewnej odciętej części wielościanu rozwiązań. Używając symboliki wektorowej możemy ten ciąg rozwiązań oznaczyć przez $X_0, X_1, \dots, X_s$.

Po drugie — jesteśmy w stanie określić rozwiązanie bliskie optymalnemu w postaci zbioru wypukłego, wyrażającego się następującą wypukłą kombinacją liniową rozwiązań $X_0, X_1, \dots, X_s$.

$$(16) \quad X = \lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s$$

gdzie

$$\sum_{i=0}^s \lambda_i = 1 \text{ oraz } \lambda_i \geq 0 \text{ dla } i = 0, 1, \dots, s.$$

Nie każdy punkt zbioru (16)) określa nam rozwiązanie optymalne, ale wiemy, że wartość funkcji kryterium dla każdego z nich nie jest mniejsza niż $z_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$

Jeżeli przez $z_0, z_1, \dots, z_s$ oznaczmy odpowiadające naszym rozwiązaniom $X_0, X_1, \dots, X_s$ wartości funkcji kryterium, zaś przez $\Delta z_0, \Delta z_1, \dots, \Delta z_s$ odpowiadające im odchylenia od optymalnej wartości funkcji kryterium, to wartość tej funkcji oraz jej odchylenia od wartości

optymalnej dla rozwiązania X określonego formułą (16) wyraża się analogicznymi wzorami.

$$\begin{aligned} z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_s z_s \\ (17) \quad \Delta z &= \lambda_0 \Delta z_0 + \lambda_1 \Delta z_1 + \dots + \lambda_s \Delta z_s \end{aligned}$$

Ze względu na warunki $\sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$ oraz $\lambda_i \geq 0$, następujące nierówności są oczywiste

$$\begin{aligned} (18) \quad \min_i [z_i] &\leq z \leq z_0 \\ 0 &\leq \Delta z \leq \max_i [\Delta z_i] \end{aligned}$$

W ten sposób sprowadziliśmy zagadnienie rozwiązywania planów reorganizacji gospodarstwa do formy bardziej elastycznej.

Uzyskując plany przez zastosowanie formuły (16), zależnych od wielu parametrów, pozostawiamy organizatorowi większe pole działania przy podejmowaniu własnych decyzji, zależnie od aktualnie istniejących okoliczności.

Jeżeli wyjściowy model zawierać będzie tylko istotne zależności, to otrzymany zbiór rozwiązań bliskich optymalnemu może okazać się zbiorem dość szerokim. Człowiek mający podjąć na podstawie tych rozwiązań decyzję ma zatem duże pole manewru. Możliwość taka jest konieczna, gdyż nigdy nie jesteśmy w stanie przewidzieć wszystkich ograniczeń, a czasami wręcz absurdem byłoby branie niektórych z nich pod uwagę, ponieważ zmieniają się one znacznie nawet w bardzo krótkim okresie czasu.

Przykład reorganizacji gospodarstwa rolnego dokonanej metodą programowania liniowego z uwzględnieniem różnych wariantów reorganizacyjnych

W poprzedniej części naszego opracowania omówiliśmy teoretyczne podstawy metody umożliwiającej uzyskanie rozwiązania optymalnego oraz wszystkich rozwiązań dopuszczalnych podstawowych i niepodstawowych, które niewiele odbiegają od optimum. Teraz natomiast postaramy się uzasadnić przydatność stosowania poprzednio omówionych sposobów w celu osiągnięcia nie tylko jednego optymalnego planu reorganizacji konkretnego gospodarstwa rolnego, ale wielu wariantów tego planu.

Zanim jednak przystąpimy do przedstawienia rozpatrywanego przez nas przykładu wyjaśnimy nasz punkt widzenia na kilka podstawowych kwestii dotyczących zakresu możliwości dokonywania reorganizacji gospodarstwa rolnego.

Powszechnie wiadomo, że proces gospodarczy w ogóle, a w rolnictwie szczególnie, jest niezwykle złożony i dlatego dątarcie do istoty zjawisk produkcyjnych i ekonomicznych, wydobycie istotnych związków i zależności jest możliwe tylko wówczas, gdy będziemy abstrahowali przy doko-

nywaniu reorganizacji od tego, co jest nieistotne, przypadkowe lub nietypowe dla danego problemu.

W takim razie reorganizując jakiegokolwiek gospodarstwo rolne, możemy jedynie odzwierciedlić interesujący nas fragment rzeczywistości z pominięciem mniej istotnych jej elementów w taki sposób, który odpowiadałby metodzie, jaką będziemy się posługiwali w czasie pracy nad rozwiązaniem powyższego problemu. Musimy jednak pamiętać, aby zostały uwzględnione wszystkie istotne elementy mogące mieć wpływ na wynik naszej pracy. Niewątpliwie najlepiej byłoby, gdyby elementy te były względnie stałe.

Ten sposób postępowania przy reorganizacji gospodarstwa rolnego okazuje się być słusznym dlatego, że sporządzając plan reorganizacyjny napotykałyśmy na duże trudności głównie przy definiowaniu warunków, w których działamy. Powodem tego jest fakt, że gospodarstwo rolne jest organizmem żywym, podlegającym ciągłym zmianom w czasie.

Konstruowanie więc nawet bardzo szczegółowego planu reorganizacyjnego, teoretycznie uwzględniającego wszystkie elementy wpływające na podejmowaną decyzję nie ma sensu, gdyż może on być przydatny tylko w bardzo krótkim okresie czasu, ponieważ warunki, w których działamy względnie, w których zamierzamy działać — zmieniają się, a tym samym dezaktualizują program. W konsekwencji może to doprowadzić do sytuacji, w której po otrzymaniu teoretycznej odpowiedzi dotyczącej pytania, jakie należy poczynić zmiany organizacyjne w gospodarstwie, aby osiągnąć najlepszy rezultat z punktu widzenia założonego celu — nie będziemy mogli przeprowadzić reorganizacji, bo dokonany plan będzie już nieaktualny. Na pewno więc słuszne jest stwierdzenie, że reorganizując gospodarstwo rolne będziemy brali pod uwagę tylko tego rodzaju zasady mogące znaleźć swój wyraz w takich lub innych obowiązujących ograniczeniach lub wskaźnikach, które w warunkach istniejącego porządku rzeczy nie mogą być pominięte w przebiegu produkcji a więc takie, w stosunku do których jesteśmy przekonani, że zostaną wykonane.

Tak pojmując reorganizację powiększamy skuteczność działania kierownictwa gospodarstwa, które będzie realizowało wytyczne planu reorganizacyjnego, ponieważ daje mu tylko pewne wskaźniki co do kierunku zmian w produkcji, pozwalając osiągnąć założony cel.

Na początku tego rozdziału stwierdziliśmy, że dokonując zmian w organizacji gospodarstwa rolnego powinniśmy abstrahować od elementów mających mało istotny wpływ na podejmowaną decyzję oraz od elementów, których wyrażenie ilościowe jest niemożliwe lub stwarza duże trudności.

Nie możemy jednak powiedzieć, iż elementy te nie mają żadnego wpływu na działalność produkcyjną w rozpatrywanym obiekcie, a ponieważ mogą one ulegać zmianom w okresie od momentu ustalenia planu reorganizacji aż do jego realizacji, w takim razie w sumie mogłyby one mieć wpływ na dezaktualizację planu optymalnego. Chcąc jednak — pomimo wszystko — realizować plan optymalny należy w pierwszej fazie dokonać korekty pod kątem widzenia zmian jakie zaszły w gospodarstwie, a których nie uwzględniliśmy w czasie dokonywania programu reorganizacji. Jeżeli korekta byłaby dokonana żywiolowo, a nie w opar-

ciu o rachunek odpowiadający metodzie, za pomocą której sporządziliśmy plan — to wówczas nie moglibyśmy określić, jak dalece odbiegamy od możliwości optymalnych. Mając jednak różne warianty planów uzyskane przy sporządzaniu planu optymalnego i znając zmiany, które zaszły w gospodarstwie, nie pozwalające na jego realizację — jesteśmy w stanie dobrać taki plan racjonalizacyjny (praktycznie optymalny), który byłby dostosowany do zmian zaszłych w elementach wyżej omawianych oraz możemy określić, jak dalece przy realizacji tego planu wynik będzie odbiegał od teoretycznie optymalnego. Poza tym niejednokrotnie warianty planów bliskie optymalnemu mogą niwelować usterki popelnione z punktu widzenia rolniczego przy precyzowaniu założeń do planu.

Trzeba jednak bardzo mocno podkreślić, że odstępianie od wyniku optymalnego musi mieć swoje konkretne uzasadnienie, bo w przeciwnym razie nie może być mowy o rezygnacji z tego rozwiązania.

Słuszność powyższych stwierdzeń potwierdzają obecne badania nad zastosowaniem metody programowania liniowego w reorganizacji gospodarstwa rolnego. Wyniki tych badań wykazały niezbędność uzyskiwania rozwiązań dopuszczalnych, które z punktu widzenia rolniczego można traktować jako praktycznie optymalne. Rozwiązania te stanowiłyby kompromis między wynikiem teoretycznie optymalnym a warunkami gospodarczymi rozpatrywanego obiektu.

Dotychczas jednak moglibyśmy jedynie uzyskiwać rozwiązania dopuszczalne bliskie optymalnemu z końcowych iteracji metody „simpleks”, ale okazuje się, że zbiór tych rozwiązań jest bardzo ograniczony i mało różnorodny, czyli pomija wiele ciekawych z punktu widzenia rolniczego wariantów planu reorganizacyjnego.

Aby móc otrzymać większą ilość tego rodzaju rozwiązań należało rozbudować algorytmy obliczeniowe metody „simpleks” o dodatkowe elementy (strona teoretyczna tego zagadnienia została przedstawiona w rozdziale 4 tej pracy).

Ponieważ i w ten sposób nie uzyskujemy możliwie pełnej ilości wariantów rozwiązań interesującego nas zagadnienia, dlatego dokonujemy tzw. wypukłej kombinacji liniowej wszystkich lub niektórych rozwiązań dopuszczalnych oraz rozwiązania optymalnego.

I tak kolejno przeprowadzając obliczenia możemy właściwie uzyskać wszystkie rozwiązania dopuszczalne, które będziemy traktowali jako praktycznie optymalne.

Aby nasze wywody nie były gołosłowne — przedstawiamy teraz jakie efekty zostały osiągnięte przy sporządzaniu planu reorganizacji konkretnego gospodarstwa rolnego metodami opisanymi w tej pracy.

Gospodarstwem, na przykładzie którego dokonano eksperymentalnej reorganizacji, jest RZD Obory. Posiada ono:

gruntów ogółem	667,7 ha
użytków rolnych	429,5 „
w tym: gruntów ornych	94,5 „
trwałych użytków zielonych	332,4 „
innych użytków	2,6 „

Na całość użytków rolnych składają się dwa kompleksy glebowe: pszeno-buraczany i żytnio-ziemniaczany.

Omaawiane gospodarstwo nie różni się zasadniczo technologią pracy od większości gospodarstw tego typu. Ponieważ siła robocza oraz siła pociągowa żywa i mechaniczna nie ogranicza możliwości produkcyjnych gospodarstwa przy tej technologii i strukturze produkcji, jaka istnieje obecnie, a zabudowania produkcyjne i mieszkalne dostatecznie zaspokajają zapotrzebowanie gospodarstwa, to stosując metodę programowania liniowego do optymalizacji zysku brutto jako miernika celu działalności produkcyjnej reorganizowaliśmy strukturę produkcji w ramach istniejących środków trwałych rozpatrywanego obiektu.

Tak więc staraliśmy się optymalnie zreorganizować jedynie produkcję roślinną i zwierzęcą z równoczesnym określeniem optymalnej wielkości środków obrotowych. Wpływało to z generalnego założenia, że po ewentualnym wprowadzeniu nowego planu reorganizacyjnego koszty stałe nie ulegną zmianie w porównaniu ze stanem istniejącym, a jeżeli ulegną to w minimalnym stopniu.

Poza tym dla zapewnienia porównywalności zysku brutto uzyskiwanego z produkcji roślinnej z zyskiem brutto uzyskiwanym z produkcji zwierzęcej w przeliczeniu na 1 ha użytków rolnych sprowadziliśmy w gospodarstwie Obory nieproporcjonalnie niską wydajność trwałych użytków zielonych do poziomu wydajności gruntów ornych. Za miernik wydajności przyjęliśmy jednostki zbożowe.

Zaznaczamy, również, że reorganizując strukturę produkcji w przykładowym gospodarstwie, dobór roślin wchodzących w skład powierzchni paszowej został z góry założony.

Jednym słowem, stosując metodę programowania liniowego racjonalizowano jedynie strukturę produkcji towarowej tak roślinnej, jak i zwierzęcej.

Tego rodzaju postępowanie niewątpliwie nie daje pełnego obrazu możliwości reorganizacyjnych, jakie można by przeprowadzić w danym obiekcie rolnym, niemniej jednak pozwoli nam zilustrować nasz pogląd, który został wysunięty w tej pracy i przedstawić możliwości, jakich można oczekiwać rozpatrując nie tylko rozwiązanie optymalne, ale i pozostałe rozwiązania dopuszczalne, mieszczące się w dopuszczalnych granicach odstępstwa od optimum, które zostały określone dla konkretnego gospodarstwa rolnego.

Po sporządzeniu zadania reorganizacyjnego metodą programowania liniowego zostało ono przeliczone na elektronicznej maszynie cyfrowej typu Ural-2 w Centrum Obliczeniowym PAN. Rozwiązanie optymalne tego zadania oraz niektóre rozwiązania dopuszczalne bliskie optymalnemu a interesujące z punktu widzenia rolniczego podajemy w tabeli 1.

Analizując tę tabelę możemy zauważyć, że funkcja celu przedstawionych w niej rozwiązań dopuszczalnych różni się od optimum nie więcej jak o 1%. Chodziło bowiem o stwierdzenie, czy tak niewielkie odchylenie, które w praktyce nie ma żadnego znaczenia, może mieć istotny wpływ na zmianę struktury produkcji przyjętej za optymalną. Ten sposób postępowania podyktowany był również tym, że nie jesteśmy w stanie z góry założyć jakiejś ogólnej i jednoznacznej granicy, która określałaby procent odchylenia od wyniku optymalnego i którą można by

Tabela 1

Optymalna struktura produkcji uzyskana w wyniku reorganizacji gospodarstwa

Obory i różne jej warianty praktycznie optymalne

Wyszczególnienie elementów struktury produkcji roślinnej i zwierzęcej	Rozwiązania różniące się od optimum nie więcej niż 1% uzyskane:									
	Rozwiązanie optymalne		z końcowych iteracji stosując metodę „simpleks”		po rozbudowaniu algorytmów obliczeniowych metody „simpleks” o dodatkowe elementy		po dokonaniu wykupkiej kombinacji liniowej rozwiązań dotychczas uzyskanych		rozwiązania niepodstawowe	
	rozwiązania podstawowe		rozwiązania podstawowe		rozwiązania podstawowe		rozwiązania podstawowe		rozwiązania podstawowe	
	1	2	3	4	5	6	7	8		
	ilość ha szt.	ilość ha szt.	ilość ha szt.	ilość ha szt.	ilość ha szt.	ilość ha szt.	ilość ha szt.	ilość ha szt.	ilość ha szt.	%

Zboża

150,5 45,3 150,3 45,3 148,3 44,6 150,4 45,2 150,5 45,3 150,5 45,3 150,6 45,3 150,4 45,2

w tym ożime:

pszenica kwalifikat 41,0 12,3 25,0 7,5 25,4 7,6 40,8 12,3 41,0 12,3 41,0 12,3 41,0 12,3 40,8 12,3
 pszenica konsumpcyjna — — 16,0 4,8 17,8 5,4 — — — — — — — —
 żyto konsumpcyjne 29,5 8,9 29,5 8,9 18,2 5,5 18,2 5,5 42,8 12,9 20,5 6,2 24,7 7,4 18,7 5,6

w tym jare:

jęczmień kwalifikat 34,0 10,2 50,0 15,0 49,6 14,9 34,3 10,3 34,0 10,2 34,0 10,2 34,0 10,2 34,2 10,3
 jęczmień konsumpcyjny 20,0 6,1 4,0 1,3 — — 19,8 5,9 20,0 6,1 20,0 6,1 20,0 6,1 19,8 5,9
 owies konsumpcyjny 26,0 7,8 26,0 7,8 37,3 11,2 37,3 11,2 12,7 3,8 35,0 10,5 30,9 9,3 36,9 11,1

roślinna

przyjmować w każdym gospodarstwie rolnym. Trudności polegają bowiem na tym, że każde gospodarstwo posiada własną specyfikę charakteryzującą się odrębnymi warunkami i czynnikami produkcyjnymi, np. kulturą gleby, stopniem wyposażenia w środki trwałe, poziomem intensywności produkcji itp. Poza tym może mieć na to wpływ poziom kwalifikacji człowieka sporządzającego projekt reorganizacyjny.

Patrząc również na strukturę produkcji każdego z rozwiązań dopuszczalnych podanych w tabeli 1 nasuwa się pytanie, jakie zmiany obszarowe w produkcji roślinnej oraz jakie zmiany w ilości sztuk inwentarza w produkcji zwierzęcej można będzie traktować jako istotne z punktu widzenia praktyki rolniczej. Na to pytanie też nie da się odpowiedzieć w sposób jednoznaczny, który dotyczyłby wszystkich gospodarstw, gdyż zależy to także od wielu czynników charakteryzujących jedynie poszczególne obiekty rolne. Czynnikami takimi, między innymi, są: obszar gospodarstwa i struktura użytków, jakość uprawianych roślin oraz hodowanych zwierząt i ich opłacalność, stopień intensywności itp.

Natomiast rozpatrywanie poza wynikiem optymalnym wielu rozwiązań dopuszczalnych bliskich optymalnemu pozwoli na zorientowanie, się, jakie możemy poczynić zmiany w stosunku do planu optymalnego w momencie, gdy pewne czynniki obiektywne nie pozwalają na ścisłe przestrzeganie założeń, które przewiduje ten plan i jak zmiany te wpłyną na zmianę struktury produkcji oraz na wartość funkcji celu.

Podamy teraz kilka przykładów mówiących jakie zmiany niezależne od człowieka mogą nastąpić w gospodarstwie rolnym.

Nieprzewidziany brak możliwości dokonania właściwych nakładów na pewne rośliny lub grupy roślin może zmusić kierownika gospodarstwa do rezygnacji z optymalnej struktury produkcji na rzecz „praktycznie optymalnej”. Nieprzewidziany, a od pewnego momentu występujący w sposób ciągły brak sezonowej siły roboczej będzie wskazywał na konieczność niwelowania szczytów robociznowych występujących w rozwiązaniu optymalnym lub ich przesuwania.

Większe zabezpieczenie bazy paszowej poprzez uprawę zwiększonej ilości poplonów spowoduje zmiany w strukturze roślin zbożowych. Nadmierne zachwaszczenie pól, które dotychczas nie występowało, może zmusić kierownika gospodarstwa do zmniejszenia wielkości jednych upraw na korzyść drugih.

Nagle wystąpienie inwazji pewnych chorób roślinnych może spowodować konieczność zmiany całej struktury produkcji roślinnej w stosunku do już zaplanowanej.

Naturalnie, jak już wspominaliśmy możemy tym i temu podobnym wypadkom zapobiec tylko w tych granicach, na jakie pozwalają nam zasadnicze założenia uwzględnione w naszym zadaniu reorganizacyjnym konstruowanym dla konkretnego gospodarstwa rolnego. Nie powinno to również wpływać na zmniejszenie wartości stanowiska, na racjonalność zmianowania ewentualnie na racjonalny stosunek wielkości produkcji roślinnej do wielkości produkcji zwierzęcej.

Poza tym możliwość uzyskania pewnych wariantów planu reorganizacji gospodarstwa drogą wypukłej kombinacji liniowej poszczególnych rozwiązań dotychczas otrzymanych pozwala nam badać wpływ z góry założonych zmian w strukturze produkcji na wartość funkcji

celu oraz określać jak dalece zmiany te odbiegają od wyniku optymalnego.

Aby stwierdzenie to stało się zupełnie zrozumiałe, wyjaśnimy je na przykładzie. Z naszego optymalnego planu reorganizacyjnego wynika, iż w gospodarstwie Obory powinno się uprawiać 22,4 ha buraka cukrowego i 14,1 ha ziemniaków. Przypuśćmy jednak, że z pewnych względów zachowanie tych proporcji w uprawie okopowych jest niemożliwe i że należałoby uprawiać buraki cukrowe i ziemniaki na powierzchni o tej samej wielkości. Żeby móc uwzględnić te założenia w już sprezytowanym planie reorganizacyjnym, musimy dokonać wypukłej kombinacji liniowej wariantu 4 z wariantem 6 — uzyskamy wówczas natychmiast (nie przeliczając ponownie całego zadania na elektronicznej maszynie cyfrowej) odpowiedź, jakie spowoduje to zmiany w pozostałych elementach struktury produkcji oraz o ile zmieni się nowo uzyskana wartość funkcji celu w stosunku do wartości optymalnej. Nowo uzyskana wartość zysku brutto i nowa struktura produkcji uwzględniająca powyższe postulaty została przedstawiona w tabeli 1 w wariantcie 8.

Aby jednak dalsza analiza wyników podanych w tabeli 1 nie budziła żadnych zastrzeżeń, należy wyjaśnić dwie kwestie: po pierwsze — dlaczego w podanych strukturach produkcji roślinnej silniejszej wariantcji podlegają takie gałęzie produkcji jak zboża i okopowe, a znacznie mniejsze zmiany następują w oleistych i motylkowych strączkowych; po drugie dlaczego we wszystkich wariantach struktury produkcji podanych w tabeli 1 nie następują żadne zmiany w produkcji zwierzęcej.

Wyjaśniając pierwszą kwestię poruszoną powyżej należy zaznaczyć, że założone w modelu reorganizacyjnym¹ zużycie poszczególnych środków na produkcję zbóż i okresy tego zużycia dla poszczególnych roślin zbożowych są bardzo zbliżone do siebie. Poza tym zyski brutto uzyskiwane z jednostki powierzchni poszczególnych roślin zbożowych niewiele różnią się między sobą, toteż istnieją większe możliwości substytucji jednych roślin zbożowych przez drugie.

Ten sam problem występuje w ramach okopowych (naturalnie biorąc pod uwagę parametry występujące w naszym przykładowym modelu), tzn., że mają one zbliżone parametry zużycia poszczególnych środków niezbędnych przy ich produkcji, jak również zyski brutto z jednostki powierzchni poszczególnych roślin okopowych różnią się od siebie bardzo nieznacznie.

Inaczej natomiast przedstawiają się sprawy w takich gałęziach produkcji jak oleiste i motylkowe strączkowe. Największy wpływ na to, że rzepak prawie w każdym wariantcie struktury produkcji roślinnej utrzymuje się na górnym ograniczeniu, jakie zostało założone w przykładowym modelu reorganizacyjnym, ma wartość zysku brutto, jaką można uzyskać przy uprawie 1 ha tej rośliny, a która to wartość jest niewspółmiernie wyższa od wszystkich pozostałych jednostkowych zysków brutto występujących w maksymalizowanej funkcji celu.

¹ Pełny opis i konstrukcję modelu liniowego dotyczącego gospodarstwa Obory, które to gospodarstwo służyło za przykład w tym opracowaniu, znajdzie Czytelnik w pracy J. Gajewskiego pt. „Programowanie liniowe w racjonalizacji gospodarstwa rolnego” PWRiL, 1964.

Teraz postaramy się zinterpretować fakt bardzo niewielkich wahań procentowego udziału motylkowych strączkowych w wariantach struktury produkcji roślinnej, podanych w tabeli 1. Wpływa to głównie z tego, iż motylkowe strączkowe, a ściślej mówiąc bobik, to zasadnicza roślina, od udziału której uzależniliśmy w naszym modelu możliwości uprawy innych roślin takich, jak pszenica i rzepak. W ten sposób staliśmy się zabezpieczyć właściwe stanowisko pod uprawę tych roślin. Dlatego też, aby zachować racjonalność struktury zasiewów prawie ta sama powierzchnia uprawy motylkowych strączkowych występuje we wszystkich wariantach struktury.

Aby całkowicie wyjaśnić pewne wątpliwości, które mogłyby wynikać przy analizie wyników podanych w tabeli 1, należy jeszcze omówić kwestię całkowitej niezmienności struktury produkcji zwierzęcej. Przy formułowaniu liniowego modelu reorganizacji gospodarstwa uwzględniliśmy dwa warianty produkcji zwierzęcej. Mianowicie: chów krów mlecznych z przychówkiem zapewniającym prostą reprodukcję stada oraz produkcję jałówek hodowlanych z licencją powiatową. Te dwie działalności, reprezentujące produkcję zwierzęcą w naszym modelu, znacznie odbiegały od siebie jednostkową wartością zysku brutto, jaką można by osiągnąć przy prowadzeniu każdej z nich. Natomiast zużycie poszczególnych środków przy prowadzeniu tych działalności było prawie identyczne. Tak więc, zdecydowana konkurencyjność krów mlecznych w stosunku do jałówek hodowlanych praktycznie biorąc wyeliminowała te drugie w czasie rozwiązywania modelu. Wyniknęło to stąd, iż jałówki hodowlane były znacznie mniej opłacalne w stosunku do krów mlecznych z przychówkiem zapewniającym prostą reprodukcję stada.

Po omówieniu powyższych niejasności chcemy jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że dotyczyły one wyłącznie modelu liniowego skonstruowanego dla gospodarstwa, które podajemy jako przykład. Również w żadnym wypadku nie należy uogólniać przykładowych wyników i sugerować, iż mogą one występować we wszystkich modelach dotyczących organizacji względnie reorganizacji przedsiębiorstw rolniczych.

Na zakończenie wyrażamy przypuszczenie, że opracowanie to powinno przyczynić się do większego zbliżenia metody programowania liniowego dla potrzeb praktyki planowania w przedsiębiorstwach rolniczych.

ЯН ГАЕВСКИ, КРИСТИЯН ЗОРИХТА

В а р ш а в а

ВОПРОС ПРИГОДНОСТИ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПРИБЛИЖЕННЫХ К ОПТИМАЛЬНОМУ РЕШЕНИЮ, ДЛЯ РЕОРГАНИЗАЦИИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

С о д е р ж а н и е

Линейные модели, конструируемые с помощью оптимизационных методов, не отражают, в общем, динамического характера экономических явлений. Они являются лишь приблизительным образом действительности, так как в них трудно учесть абсолютно все зависимости, выступающие в рассматриваемом комплексе явлений.

В настоящей работе авторы пытались пополнить методы линейного программирования новыми элементами, обуславливающими все большую эластичность оптимального плана.

Основной мыслью авторов было стремление к определению некоторого количества вариантов этого плана, с тем однако, что их следует считать как „практически оптимальные”, так как разница между максимальной стоимостью функций цели и стоимостью функций цели вариантов приближенных к оптимальной цели, будет, по всей вероятности практически незначительна. При таком подходе к организационному или реорганизационному плану, возможно станет все более эластичное планирование. До настоящего времени это было частично достижимо при обсуждении нескольких последних основных решений, которые можно получить на основании интераций метода „симплекс”. Однако решений таких не много и они, вобщем, не разнообразны. Чтобы однако увеличить разнообразие комплекса решений приближенных оптимальному решению, авторы соответственно приспособили метод „симплекс” таким образом, что он разрешает увеличить сбор решений и получить их более значительное разнообразие.

Проводя затем т. наз. выпуклую линейную комбинацию вариантов, полученных до настоящего времени, авторы показали, что с одной стороны существует в сущности возможность обозначить все интересующие варианты плана, с другой стороны — можно вести исследования, какое влияние могут оказать заранее предположенные изменения в структуре планируемой продукции на стоимость функции цели и на сколько изменения эти отдаленные от оптимального результата.

JAN GAJEWSKI, KRYSZTOF ZARYCHTA

Warsaw

THE PROBLEM OF THE SUITABLENESS OF ECONOMETRICAL SOLUTIONS, SHORT OF OPTIMAL, FOR THE REORGANIZATION OF AGRICULTURAL ENTERPRISES

Summary

Linear models constructed by the means of optimization methods, do not represent, generally speaking, the dynamic character of the economic phenomena, being only an approximate picture of the reality, as they do not cover all possible dependencies, which might appear in the given complex of the phenomena.

Thus attempt has been made by the authors to develop linear programming methods by their complementation with the new elements, enabling a higher elasticity of the optimal plan.

Estimation of a given number of variants of the above plan, has been the authors' guiding idea, however, with reservation, that they would be considered as „practically optimal”, i. e. that the difference between the maximal value of the target function and the value of the target of variants, short of optimal, will, from the practical point

of view, certainly be not a significant one. Such an approach to the organizational or re-organizational plan enables a more and more elastic planning. Up till now this has been, to some extent, achieved when some last principal solutions were considered, obtained from the terminal iterations of the „simplex” method. Such solutions are but few and they usually are nor quite diversified. Aiming a higher diversification of the complex of nearly optimal solutions, some adaptation of the „simplex” method has been introduced by the authors, aiming a widened complex of solutions and their higher diversification.

By the means of the so called convexed linear combination of variants obtained up till now, the authors proved that on the one hand it is possible to determine all variants in question for an optimal plan, on the other hand the investigation may be carried out on the influence of the a priori assumed changes of the structure of the planned production, on the value of the function of target as well as investigate the deviation of the above changes from the optimal result.