TERESA MARSZAŁKOWICZ
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Warszawa

C

PROGRAMOWANIE LINIOWE. TECHNIKA OBLICZEŃ OPTYMALNEGO PROGRAMU

Opracowano w oparciu o artykuł[1] James N. Boles'a: Linear programming and farm management analysis. Journal of Farm Economics, Volume XXXVII, February 1955, Number 1.

Stosując metodę programowania liniowego dla znalezienia optymalnego programu[2] przyjmujemy następujące założenia:

1. **Podzielność badanych nakładów.** Sprowadza się to do przyjęcia, że na przykład uprawiając 0,35 jednostki obszaru, 7,63 jednostki obszaru, czy też jakąkolwiek inną powierzchnię danego ziemiopłodu, stosujemy taką samą technikę produkcji. Innymi słowy, wszystkie nakłady są ściśle proporcjonalne do uprawianej powierzchni danego ziemiopłodu.
2. **Proporcjonalność (liniowość) przychodu.** Wielkość przychodu z jednostki powierzchni danego ziemiopłodu jest stała — niezależnie od tego czy powierzchnia zajęta pod uprawę danego ziemiopłodu jest mała czy też duża. Przy ustalaniu powierzchni jaką poświęcimy na uprawę danego ziemiopłodu jesteśmy więc ograniczeni jedynie ilością posiadanych środków produkcji, zasobów pracy i kapitału. Teoretycznie więc może się okazać, że maksymalny dochód uzyskamy uprawiając w gospodarstwie tylko jedną roślinę.
3. **Niezależność dochodów z poszczególnych ziemiopłodów.** Dochód uzyskany jest prostą sumą dochodów obliczonych dla poszczególnych ziemiopłodów. Mówiąc inaczej — dochód uzyskiwany z jednostki powierzchni danego ziemiopłodu jest zupełnie niezależny od tego, czy, jakie i w jakiej ilości inne jeszcze ziemiopłody są uprawiane w gospodarstwie.

Niniejszy artykuł ma na celu przedstawienie, w oparciu o cytowaną pracę J. Bolesa, techniki obliczeń prowadzącej do znalezienia optymalnego programu. Nie chcemy się więc tu wdawać w dyskusję nad realnością powyższych założeń. Ich przyjęcie umożliwia zastosowanie przedstawionej dalej, opartej na rachunku wektorowym, techniki obliczeń. Chcieliśmy tylko przypomnieć, że metoda programowania liniowego, a przede wszystkim możliwość jej praktycznego zastosowania

---

[1] Z pracy J. Bolesa wzięliśmy przykład liczbowy i wzory robocze. Natomiast za tok przedstawienia metody obliczeń oraz za uwagi wstępne odpowiada autor niniejszego opracowania. Przede wszystkim może budzić zastrzeżenia pominięcie przez nas omówienia zasad rachunku wektorowego, na którym oparta jest metoda niniejsza wyboru optymalnego programu. Chcieliśmy jednak przedstawić metodę obliczeń możliwie dostępną dla czytelnika, nie mającego w tej dziedzinie przygotowania teoretycznego.

[2] W omawianym przykładzie program optymalny — to program dający najwyższy dochód. Oczywiście możemy szukać optymalnego programu i z innego punktu widzenia, np. programu dającego najwyższą produkcję globalną, produkcję towarową itp.

w rolnictwie budzi jak dotąd poważne zastrzeżenia[1]. Niemniej metoda ta zdobyła sobie już prawo obywatelstwa i niezależnie od jej możliwości zastosowania do praktycznych rozwiązań warto ją poznać. Niewątpliwie zresztą plan produkcji opracowany przy jej zastosowaniu może być pewną pomocą przy układaniu planu dla gospodarstwa. Nie ma zresztą jak wiemy metod „idealnych" — każda metoda może dać tylko pewne przybliżenie do rzeczywistości. Każda metoda statystyczna czy ekonometryczna opiera się bowiem na pewnych założeniach. Dlatego przy stosowaniu metod teoretycznych, przy analizowaniu stanu faktycznego, czy programowaniu musimy zawsze pamiętać o tych związanych imanentnie z daną metodą założeniach. Wówczas tylko będziemy mogli patrzeć krytycznie na wyniki opracowania i wyciągnąć właściwe wnioski, bez obawy zabrnięcia w dziedzinę fantazji.

*

* *

Wróćmy jednak do techniki obliczeń przedstawionej w pracy J. Bolesa. Przystępując do znalezienia optymalnego programu musimy mieć następujące dane:

1. Ilość jednostek poszczególnych rodzajów środków jakimi rozporządzamy dla podjęcia produkcji.
2. Ilość jednostek poszczególnych rodzajów środków jakie są potrzebne przy uprawie jednostki powierzchni danego ziemiopłodu.
3. Dochód uzyskiwany z jednostki powierzchni danego ziemiopłodu.

W omawianym artykule autor przyjmuje następujące dane liczbowe, w oparciu o które przedstawimy technikę obliczeń prowadzącą do znalezienia optymalnego programu:

1. Rozporządzamy następującymi ilościami środków produkcji[2]:

ziemia	—	4 jednostki
praca	—	6 jednostek
kapitał	—	8 jednostek

2. Przy uprawie jednostki powierzchni poszczególnych ziemiopłodów (dalej będziemy je nazywali produktami) potrzebne są następujące ilości jednostek środków produkcji:

Produkt 1 — 4 jednostki pracy	i	1 jednostka kapitału
Produkt 2 — 2 ,, ,,	,,	3 jednostki ,,
Produkt 3 — 2 ,, ,,	,,	4 ,, ,,
Produkt 4 — 1 ,, ,,	,,	2 ,, ,,

Wszystkie produkty potrzebują oczywiście w powyższym przeliczeniu po 1 jednostce ziemi (gdyż wszystkie wielkości są przeliczane na jednostkę powierzchni — oczywiście taką jednostkę w jakich w p. 1 podano rozporządzalną ilość jednostek ziemi).

3. Dochód uzyskiwany z uprawianej jednostki powierzchni danego produktu wynosi:

Produkt 1 — 3 jednostki pieniężne
Produkt 2 — 4 ,, ,,
Produkt 3 — 2 ,, ,,
Produkt 4 — 1 jednostkę pieniężną

Na podstawie powyższych danych zestawiamy tabelę (por. tab. 1), która pozwoli nam przy zastosowaniu metody wektorowej obliczyć program produkcji optymalny z punktu widzenia wielkości dochodu.

W prawej części tabeli, zakreślonej podwójną kreską, wprowadzamy dane mówiące o ilości środków, potrzebnych przy uprawie jednostki powierzchni poszczególnych produktów. Dla produktu 1 (wektor P_1) będzie to więc: 1 jednostka ziemi ($a_{51} = 1$), 4 jednostki pracy ($a_{61} = 4$) oraz 1 jednostka kapitału ($a_{71} = 1$). Analogicznie podstawiając dane zadania dla produktu 2 (wektor P_2) będziemy mieli: $a_{52} = 1$; $a_{62} = 2$;

[1] Por. np. dyskusję zamieszczoną przy artykule: C. B. Clarke, I. G. Simpson: A Theoretical Approach to the Profit Maximization Problems in Farm Maganement. Journal of Agricultural Economics, Vol. XIII, No 3, June 1959.

[2] Termin „środki produkcji" w odniesieniu do ziemi, pracy i kapitału nie jest oczywiście poprawny. Będziemy go jednak dalej używać, aby uniknąć każdorazowo dłuższego omawiania tej grupy.

Tabela 1

Dane wyjściowe

c_j			c_5 0	c_6 0	c_7 0	c_1 3	c_2 2	c_3 4	c_4 1
	P_j	P_o	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
c_5 0	P_5	a_{50} 4	a_{55} 1	a_{56} 0	a_{57} 0	a_{51} 1	a_{52} 1	a_{53} 1	a_{54} 1
c_6 0	P_6	a_{60} 6	a_{65} 0	a_{66} 1	a_{67} 0	a_{61} 4	a_{62} 2	a_{63} 2	a_{64} 1
c_7 0	P_7	a_{70} 8	a_{75} 0	a_{76} 0	a_{77} 1	a_{71} 1	a_{72} 3	a_{73} 4	a_{74} 2
z_j		z_o 0	z_5 0	z_6 0	z_7 0	z_1 0	z_2 0	z_3 0	z_4 0
$z_j - c_j$			z_5-c_5 0	z_6-c_6 0	z_7-c_7 0	z_1-c_1 —3	z_2-c_2 —2	z_3-c_3 —4	z_4-c_4 —1

$a_{72} = 3$. A dalej dla produktu 3 (wektor P_3): $a_{53} = 1$; $a_{63} = 2$; $a_{73} = 4$ oraz dla produktu 4 (wektor P_4): $a_{54} = 1$; $a_{64} = 1$; $a_{74} = 2$.

Nad odpowiednimi wektorami wstawiamy odpowiednie wielkości dochodu uzyskiwane z jednostki powierzchni uprawy danego produktu. Wielkości dochodu są oznaczone symbolem c z odpowiednim subskryptem. Dochód uzyskiwany z jednostki powierzchni uprawy produktu 1 zgodnie z danymi zadania wynosi 3 jednostki pieniężne — w tablicy 1 mamy więc $c_1 = 3$. Analogicznie dochód dla produktu 2: $c_2 = 2$; dla produktu 3: $c_3 = 4$; dla produktu 4: $c_4 = 1$.

Po lewej stronie tabeli umieszczamy jeszcze wektory: P_o — mówiący o ilości jednostek poszczególnych środków produkcji jakimi dysponujemy. Zgodnie z danymi zadania wektor P_o składa się więc z następujących wartości: $a_{50} = 4$ (gdyż mamy do dyspozycji 4 jednostki ziemi); $a_{60} = 6$ (gdyż mamy do dyspozycji 6 jednostek pracy; $a_{70} = 8$ (gdyż mamy do dyspozycji 8 jednostek kapitału). Ponadto po lewej stronie tabeli umieszczamy jeszcze trzy wektory (tzw. dyspozycyjne): P_5, P_6, P_7. Wektor P_5 przedstawia 1 jednostkę ziemi będącą w dyspozycji; wektor P_6 — jedną jednostkę pracy będącą w dyspozycji; wektor P_7 — jedną jednostkę kapitału będącą w dyspozycji. Te same symbole wektorów P_5, P_6 i P_7 wpisujemy w kolumnie P_j. Widzimy, że wartość tych trzech wektorów czytana pionowo czy poziomo jest ta sama (oczywiście po wyłączeniu wektora P_o). Ponieważ „ziemia w dyspozycji", „praca w dyspozycji" oraz „kapitał w dyspozycji" nie przynoszą żadnego dochodu wartości: $c_5 = 0$, $c_6 = 0$, $c_7 = 0$. Wartości c_5, c_6 i c_7 wpisujemy nad (oraz przed) odpowiednimi wektorami P_5, P_6 i P_7.

Pod wektorami wprowadzamy dalej wiersz oznaczony symbolem z_j. Odpowiednie wartości z (z_0, z_5, z_6, z_7, z_1, z_2, z_3, z_4) mówią nam jaki będzie miał miejsce ubytek dochodu z innego produktu, gdy na miejsce tego innego produktu wprowadzimy do planu produkcji dany produkt. Różnica $z_j - c_j$ powie nam więc czy i jak dalece opłaci się wprowadzać do planu dany produkt.

Wartość ujemna $z_j - c_j$ mówi nam więc o tym, że dany produkt opłaci się wprowadzić do planu. Im bezwzględna wartość tej ujemnej różnicy jest większa, tym bardziej opłacalne jest wprowadzenie do planu danego produktu (gdyż tym wyższa jest nadwyżka „zysku" osiągniętego przez wprowadzenie danego produktu do planu nad „stratę", jaką pociąga za sobą zmniejszenie zysku z innych produktów, które zostały ograniczone w planie). Odwrotnie — wartość zerowa lub dodatnia tej różnicy wskazuje nam na to, że wprowadzenie danego produktu do planu pociągnęłoby zmniejszenie dochodu w stosunku do poprzednio ustalonego planu.

W tab. 1 wszystkie wartości z_j są równe zero — gdyż nie ustaliliśmy jeszcze żadnego planu produkcji. Nie może więc być mowy o zastępowaniu jednego produktu, już wprowadzonego do planu, przez inny, nowy, produkt. Wartości $z_j - c_j$ są więc równe co do bezwzględnej wartości, mają tylko odwrotne znaki co wpisane na samej górze tabeli wartości c_j.

* * *

Po wypełnieniu tabeli 1 możemy przystąpić do następnego etapu: wyboru, tzw. pierwszego planu produkcji, tj. wyboru pierwszego (i na razie jednego tylko) produktu, którego wprowadzenie do planu da nam najwyższy dochód. Podstawą stwierdzenia, który z produktów wprowadzony do planu da nam najwyższy dochód, będzie wartość $z_j - c_j$. Jak powiedzieliśmy wyżej, im większa będzie ujemna wartość tej różnicy — tym dochód z wprowadzenia danego produktu będzie większy. W naszym przykładzie najwyższą wartość ujemną mamy dla produktu 3 (gdyż $z_3 - c_3 = -4$). Wybieramy więc ten produkt jako pierwszy, który wprowadzimy do planu. Wektor (lub całą kolumnę), który odpowiada danemu produktowi zakreślamy podwójną linią (por. tab. 2)[1].

Tabela 2

Wybór pierwszego produktu dla ustalenia pierwszego planu produkcji

c_j			c_5 0	c_6 0	c_7 0	c_1 3	c_2 2	c_3 4	c_4 1
	P_j	P_o	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
c_5 0	P_5	a_{50} 4	a_{55} 1	a_{56} 0	a_{57} 0	a_{51} 1	a_{52} 1	a_{53} 1	a_{54} 1
c_6 0	P_6	a_{60} 6	a_{65} 0	a_{66} 1	a_{67} 0	a_{61} 4	a_{62} 2	a_{63} 2	a_{64} 1
c_7 0	P_7	a_{70} 8	a_{75} 0	a_{76} 0	a_{77} 1	a_{71} 1	a_{72} 3	a_{73} 4	a_{74} 2
z_j		z_o 0	z_5 0	z_6 0	z_7 0	z_1 0	z_2 0	z_3 0	z_4 0
$z_j - c_j$			z_5-c_5 0	z_6-c_6 0	z_7-c_7 0	z_1-c_1 —3	z_2-c_2 —2	z_3-c_3 —4	z_4-c_4 —1

Pozostaje do ustalenia, ile jednostek powierzchni możemy przeznaczyć pod uprawę danego produktu. Jest rzeczą oczywistą, że będzie to zależało niekoniecznie od całej rozporządzalnej ilości jednostek ziemi. Będzie to zależało od ilości tego środka produkcji (nakładu), którego proporcjonalnie do wymogów danego produktu będziemy mieli najmniej. Dla stwierdzenia powyższego obliczymy stosunki:

$$a_{50} : a_{53} = 4 : 1 = 4$$

Stosunek ten wskazuje nam, że zasób ziemi pozwala nam na wprowadzenie aż 4 jednostek powierzchni uprawy produktu 3. Dalej obliczymy stosunek:

$$a_{60} : a_{63} = 6 : 2 = 3$$

[1] W praktyce oczywiście zakreśliliśmy kolumnę na tab. 1, a nie budowaliśmy nowej tabeli. Przy opracowaniu niniejszego problemu mielibyśmy tylko trzy tabele: tab. 2, tab. 4 i tab. 5(3). Wszystkie pozostałe tabele zawarte w niniejszym artykule zostały wprowadzone tylko dla przedstawienia kolejno etapów rozwiązania zadania, tj. znalezienia optymalnego programu.

Wskazuje nam on, że pracy wystarczy nam tylko na 3 jednostki powierzchni uprawy produktu 3. A wreszcie stosunek

$$a_{70} : a_{73} = 8 : 4 = 2$$

mówi nam, że kapitału wystarczy tylko na 2 jednostki powierzchni uprawy produktu 3. Jest rzeczą oczywistą, że najmniejsza wartość z powyższych trzech ilorazów ogranicza nam ilość jednostek powierzchni danego produktu, jaką możemy wprowadzić do planu. W naszym konkretnym przykładzie będą to więc 2 jednostki powierzchni uprawy produktu 3, które możemy wprowadzić do pierwszego planu produkcji.

Ponieważ rozporządzalna ilość kapitału (P_7) ogranicza nam ilość jednostek produktu 3 —, zakreślamy podwójną linią cały wiersz P_7.

Po podjęciu decyzji, który produkt wprowadzony do pierwszego planu produkcji da nam najwyższy dochód, przystępujemy do obliczenia wartości, jakie się znajdą w następnej tabeli. Tabela ta [obliczone dane znajdują się w tab. 3(3)] wskaże nam, jaki dochód łączny osiągniemy przez wprowadzenie produktu 3 do pierwszego planu produkcji. Nawet bez wykonywania skomplikowanych przeliczeń potrzebnych do zestawienia tab. 3(3) możemy przewidzieć, że dochód ten wyniesie 8 jednostek pieniężnych. Jeżeli bowiem każda jednostka powierzchni uprawy produktu 3 daje nam zgodnie z danymi zadania 4 jednostki pieniężne, to wprowadzenie do planu dwóch jednostek powierzchni uprawy tego produktu (na więcej nie pozwalał nam bowiem posiadany kapitał), da nam: $4 \times 2 = 8$ jednostek pieniężnych. W tab. 3(3) wartość $z_0 = 8$ mówi nam to samo: wprowadzenie do produktu pierwszego planu produkcji 3 da nam dochód w wysokości 8 jednostek pieniężnych. Znaczenie zasadnicze tab. 3(3) polega jednak dla nas na tym, że pozwoli nam ona stwierdzić, czy pierwszy plan produkcji jest planem optymalnym, tj. dającym najwyższy dochód. Jeżeli plan nie jest optymalny — to tab. 3(3) pozwoli nam również stwierdzić, który następny produkt warto najbardziej wprowadzić do planu produkcji, ograniczając odpowiednio (to „odpowiednio" znowu nam wskaże tabela) uprawę produktu 3.

Tabela 3(1)

Wprowadzenie do planu produktu 3

Wprowadzenie wektora P_3 zamiast wektora (wiersza) P_7

c_j									
	P_j	P_o	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
c_3	P_3	b_{30}	b_{35}	b_{36}	b_{37}	b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}

Zanim przystąpimy do analizy tab. 3(3) i ustalenia na jej podstawie drugiego planu produkcji, musimy najpierw zapoznać się ze sposobem obliczenia wartości liczbowych zawartych w tej tabeli. Dla ułatwienia czytelnikowi zapoznania się ze sposobem obliczania poszczególnych wartości w tab. 3(3) podobnie jak w tab. 2 obok wartości liczbowych zamieściliśmy w odpowiednich kratkach tabeli również

Tabela 3(2)

Wprowadzenie do planu produktu 3
Obliczenie współczynników b_{ij} dla wierszy nie zakreślonych w tabeli 2

c_j			c_5 0	c_6 0	c_7 0	c_1 3	c_2 2	c_3 4	c_4 1
	P_j	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
c_5 0	P_5	b_{50} 2	b_{55} 1	b_{56} 0	b_{57} —1/4	b_{51} 3/4	b_{52} 1/4	b_{53} 0	b_{54} 1/2
c_6 0	P_6	b_{60} 2	b_{65} 0	b_{66} 1	b_{67} —1/2	b_{61} 7/2	b_{62} 1/2	b_{63} 0	b_{64} 0*)
c_3	P_3								
z_j									
$z_j — c_j$									

*) W tabeli 4 cytowanego artykułu J. Boles'a błąd drukarski.

Tabela 3(3)

Pierwszy plan produkcji
Obliczenie współczynników b_{ij} dla wiersza zakreślonego w tabeli 2
[wiersza P_3 w tabeli 3(1)]
Obliczenie wartości z_j oraz $z_j — c_j$

c_j			c_5 0	c_6 0	c_7 0	c_1 3	c_2 2	c_3 4	c_4 1
	P_j	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
c_5 0	P_5	b_{50} 2	b_{55} 1	b_{56} 0	b_{57} —1/4	b_{51} 3/4	b_{52} 1/4	b_{53} 0	b_{54} 1/2
c_6 0	P_6	b_{60} 2	b_{65} 0	b_{66} 1	b_{67} —1/2	b_{61} 7/2	b_{62} 1/2	b_{63} 0	b_{64} 0
c_3 4	P_3	b_{30} 2	b_{35} 0	b_{36} 0	b_{37} 1/4	b_{31} 1/4	b_{32} 3/4	b_{33} 1	b_{34} 1/2
z_j		z_0 8	z_5 0	z_6 0	z_7 1	z_1 1	z_2 3	z_3 4	z_4 2
$z_j — c_j$			z_5-c_5 0	z_6-c_6 0	z_7-c_7 1	z_1-c_1 —2	z_2-c_2 1	z_3-c_3 0	z_4-c_4 1

odpowiednie symbole. W każdej kratce tabeli w jej lewej górnej części mamy odpowiedni symbol, w części prawej dolnej — wartość liczbową wynikającą z danych zadania (tab. 2), czy też wykonanych obliczeń [tab. 3(3) i odpowiednio innej

Obliczenie pierwszego planu produkcji

Pierwszą czynnością dla zbudowania tabeli 3(3) (tj. ustalenia pierwszego planu produkcji) będzie wprowadzenie do nowej tabeli[1] wektora P_3 zamiast wiersza (wektora) P_7. Subskrypty przy symbolach b_{ij} w nowej tabeli będą więc w tym wierszu tabeli inne niż subskrypty przy symbolach a_{ij} w tab. 2. Inny też odpowiednio będzie w tym wierszu subskrypt przy symbolu c_j. Ten etap budowy tabeli 3(3) przedstawiono w tab. 3(1). W pozostałych wierszach subskrypty przy b_{ij} w tab. 3(3) są te same co subskrypty przy a_{ij} w tab. 2.

1. Najpierw obliczamy te wartości b_{ij}, które mają takie same subskrypty co wartości a_{ij} (tj. w naszym przykładzie wiersz pierwszy i drugi. W innym przykładzie te same subskrypty przy a_{ij} oraz b_{ij} mogłyby się powtarzać np. w wierszu pierwszym i trzecim lub w drugim i trzecim). Te same subskrypty przy a_{ij} oraz b_{ij} będą w wierszach nie zakreślonych. Obliczymy je na podstawie równania:

$$b_{ij} = a_{ij} - (a_{7j} : a_{73})a_{i3} \qquad (Ia)$$

Cyfry stałe w subskryptach zależą od tego, który wiersz i którą kolumnę — mówiąc w skrócie — zakreśliliśmy. W wyrażeniu w nawiasie przy dzielnej, pierwsza cyfra subskryptu będzie odpowiadała subskryptowi przy P zakreślonego wiersza (por. tab. 2). Dzielnik (wyrażenia w nawiasie) jest wartością stałą — będzie to mianowicie, jak widzimy z subskryptu, wartość stojąca na przecięciu się zakreślonego podwójną linią wiersza i kolumny. Obliczony iloraz mnożymy przez wartość a_{ij} przy której druga cyfra subskryptu odpowiada subskryptowi przy P zakreślonego wektora (kolumny).

Kolejne wartości wiersza pierwszego i drugiego tab. 3(3) obliczymy więc następująco:

$$b_{50} = a_{50} - (a_{70} : a_{73})\, a_{53} = 4 - (8 : 4)\, 1 = 2$$
$$b_{60} = a_{60} - (a_{70} : a_{73})\, a_{63} = 6 - (8 : 4)\, 2 = 2$$
$$b_{55} = a_{55} - (a_{75} : a_{73})\, a_{53} = 1 - (0 : 4)\, 1 = 1$$
$$b_{65} = a_{65} - (a_{75} : a_{73})\, a_{63} = 0 - (0 : 4)\, 2 = 0$$
$$b_{56} = a_{56} - (a_{76} : a_{73})\, a_{53} = 0 - (0 : 4)\, 1 = 0$$

$$\vdots$$

$$b_{51} = a_{51} - (a_{71} : a_{73})\, a_{53} = 1 - (1 : 4)\, 1 = 3/4$$
$$b_{61} = a_{61} - (a_{71} : a_{73})\, a_{63} = 4 - (1 : 4)\, 2 = 7/2$$
$$b_{52} = a_{52} - (a_{72} : a_{73})\, a_{53} = 1 - (3 : 4)\, 1 = 1/4$$

itd.

Wyniki tego etapu obliczeń przedstawiliśmy w tab. 3(2).

2. Po obliczeniu powyższych wartości możemy przystąpić do obliczenia wartości b_{ij} w wierszu odpowiadającym wartościom a_{ij} leżącym w wierszu zakreślonym w tab. 2. Jak wspomnieliśmy wyżej w tym wierszu a_{ij} oraz b_{ij} odpowiednich tabel mają inne subskrypty. Odpowiednie wartości b_{ij} obliczymy na podstawie równania:

$$b_{3j} = \frac{a_{5j} - b_{5j}}{a_{53}} \qquad (IIa)$$

lub też równania

$$b_{3j} = \frac{a_{6j} - b_{6j}}{a_{63}} \qquad (IIa')$$

Wartości stałe w subskryptach zależą, jak widzimy, od tego, która kolumna i który wiersz zostały zakreślone w tab. 2. Przy wykonywaniu obliczeń możemy

[1] Jak zapewne czytelnik zauważył, siatki wszystkich tabel są identyczne.

się posłużyć równaniem (IIa) lub (IIa') — wynik będzie ten sam. Jak z powyższego wynika jest rzeczą obojętną, z którego wiersza wolnego (nie zakreślonego) przyjmiemy wartości a_{ij} oraz b_{ij} z tab. 2 i 3(2).

Kolejne wartości wiersza trzeciego tab. 3(3) obliczymy więc następująco:

$$b_{30} = \frac{a_{50} - b_{50}}{a_{53}} = \frac{4 - 2}{1} = 2$$

lub też:

$$b_{30} = \frac{a_{60} - b_{60}}{a_{63}} = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

$$b_{35} = \frac{a_{55} - b_{55}}{a_{53}} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

$$\vdots$$

$$b_{31} = \frac{a_{51} - b_{51}}{a_{53}} = \frac{1 - 3/4}{1} = 1/4$$

$$b_{32} = \frac{a_{52} - b_{52}}{a_{53}} = \frac{1 - 1/4}{1} = 3/4$$

itd.

3. Po obliczeniu wszystkich wartości b_{ij} w tab. 3(3) możemy przystąpić do obliczenia z_j. Obliczymy je na podstawie równania:

$$z_j = b_{5j}c_5 + b_{6j}c_6 + b_{3j}c_3 \qquad \text{(III}a\text{)}$$

Jak widzimy subskrypty przy c zależą odpowiednio od subskryptów przy P (w kol. P_j), jakie znalazły się w wierszach tab. 3(3). Kolejne wartości z_j obliczymy więc:

$z_o = b_{50}c_5 + b_{60}c_6 + b_{30}c_3 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8$
$z_5 = b_{55}c_5 + b_{65}c_6 + b_{35}c_3 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0$

$$\vdots$$

$z_1 = b_{51}c_5 + b_{61}c_6 + b_{31}c_3 = 3/4 \cdot 0 + 7/2 \cdot 0 + 1/4 \cdot 4 = 1$
$z_2 = b_{52}c_5 + b_{62}c_6 + b_{32}c_3 = 1/4 \cdot 0 + 1/2 \cdot 0 + 3/4 \cdot 4 = 3$
itd.

4. Po obliczeniu z_j obliczamy dalej ostatni wiersz tab. 3(3), tj. $z_j - c_j$. Wartości c_j w górnym wierszu tabeli 3(3) są te same co w górnym wierszu tab. 2 (podobnie w tab. 5(3) w górnym wierszu tabeli mamy te same wartości c_j co w tab. 2 i 3(3).

Tabela obrazująca efekt, jaki da nam pierwszy plan produkcji jest więc gotowa. Możemy przystąpić do ustalenia drugiego planu produkcji.

Obliczenie drugiego planu produkcji

Mając obliczony pierwszy plan produkcji musimy najpierw sprawdzić, czy nie jest to może plan optymalny z punktu widzenia osiąganego dochodu. Plan jest wówczas optymalny gdy wszystkie:

$$z_j - c_j \geqslant 0$$

To stwierdzenie można wyjaśnić następująco: Wartość z_j mówi nam, o ile zmniejszy się dochód z innego (innych) produktu, gdy dany produkt wprowadzimy do planu produkcji kosztem innego (czy innych) produktu. Natomiast c_j wskazywało nam wielkość dochodu, jaki pociąga za sobą wprowadzenie do planu jednostki powierzchni uprawy danego produktu. Jeżeli więc wprowadzając jakikolwiek nowy produkt do planu możemy tylko więcej stracić niż zyskać (do tego bowiem sprowadza się dodatnia wartość $z_j - c_j$) plan nakreślony jest planem optymalnym.

Jeżeli natomiast dla niektórych produktów

$$z_j - c_j < 0$$

to wprowadzenie ich do nowego planu produkcji musi zwiększyć nasz łączny dochód. Wzrost dochodu łącznego przez wprowadzenie do planu danego produktu będzie tym większy, im bezwzględna wartość różnicy będzie większa.

W tab. 3(3) mamy jeszcze ujemne wartości $z_j - c_j$ dla produktu 1. Pierwszy plan produkcji nie jest więc planem optymalnym. Wprowadzając do planu nowy produkt kosztem zmniejszenia w planie ilości produktu 3, zwiększamy nasz łączny dochód.

Gdyby dla kilku produktów wartość $z_j - c_j$ były ujemne, to analogicznie jak ustalając pierwszy plan produkcji musielibyśmy podjąć decyzję, który produkt z kolei wprowadzić do planu produkcji. Ponieważ najwyższa wartość ujemna (w danym przykładzie jedyna ujemna) różnicy $z_j - c_j$ jest w tab. 3(3) dla produktu 1, decydujemy więc wprowadzić go do planu. Zakreślamy więc (por. tab. 4) kolumnę P_1.

Tabela 4

Wybór drugiego produktu dla ustalenia drugiego planu produkcji

c_j			c_5 0	c_6 0	c_7 0	c_1 3	c_2 2	c_3 4	c_4 1
	P_j	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
c_5 0	P_5	b_{50} 2	b_{55} 1	b_{56} 0	b_{57} —1/4	b_{51} 3/4	b_{52} 1/4	b_{53} 0	b_{54} 1/2
c_6 0	P_6	b_{60} 2	b_{65} 0	b_{66} 1	b_{67} —1/2	b_{61} 7/2	b_{62} 1/2	b_{63} 0	b_{64} 0
c_3 4	P_3	b_{30} 2	b_{35} 0	b_{36} 0	b_{37} 1/4	b_{31} 1/4	b_{32} 3/4	b_{33} 1	b_{34} 1/2
z_j		z_0 8	z_5 0	z_6 0	z_7 1	z_1 1	z_2 3	z_3 4	z_4 2
$z_j - c_j$			z_5-c_5 0	z_6-c_6 0	z_7-c_7 1	z_1-c_1 —2	z_2-c_2 1	z_3-c_3 0	z_4-c_4 1

Obliczamy stosunki:

$$b_{50} : b_{51} = 2 : 3/4 = 8/3$$
$$b_{60} : b_{61} = 2 : 7/2 = 4/7$$

Mniejsza wartość z powyższych ilorazów ogranicza nam ilość jednostek powierzchni danego produktu, jaką możemy wprowadzić do planu. Rozporządzalna jeszcze ilość jednostek pracy ogranicza nam do 4/7 ilość jednostek powierzchni uprawy produktu 1, jaką możemy wprowadzić do drugiego planu produkcji (ziemi wystarczyłoby nam jeszcze na 8/3 jednostek powierzchni uprawy produktu 1). Zakreślamy wiersz, który zawiera ograniczający nakład, tj. tu nakład pracy (P_6).

Zestawienie tabeli, w której będziemy mieli przedstawione efekty wprowadzenia drugiego planu produkcji [tab. 5(3)] będzie analogiczne jak zestawienie tab. 3(3). Pierwszą czynnością dla zbudowania tab. 5(3) będzie wprowadzenie wektora P_1 zamiast wiersza (wektora) P_6 [por. tab. 5(1)].

1. Najpierw obliczamy wartości d_{ij} odpowiadające wartościom nie zakreślonym w tab. 4 [por. tab. 5(2)] za pomocą analogicznego równania jak (Ia) zmieniając

Tabela 5(1)

Wprowadzenie do planu produktu 1
Wprowadzenie wektora P_1 zamiast wektora (wiersza) P_6

c_j									
	P_j	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
c_1	P_1	d_{10}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}

odpowiednio cyfry stałe w subskryptach. Obliczamy je więc na podstawie równania

$$d_{ij} = b_{ij} - (b_{6j} : b_{61})\, b_{i1} \qquad (Ib)$$

A więc:

$$d_{50} = b_{50} - (b_{60} : b_{61})\, b_{51}$$
$$d_{30} = b_{30} - (b_{60} : b_{61})\, b_{31}$$
$$d_{55} = b_{55} - (b_{65} : b_{61})\, b_{51}$$
$$\vdots$$
$$d_{51} = b_{51} - (b_{61} : b_{61})\, b_{51}$$
$$d_{31} = b_{31} - (b_{61} : b_{61})\, b_{31}$$
$$d_{52} = b_{52} - (b_{62} : b_{61})\, b_{51}$$

itd.

Wyniki tego etapu obliczeń przedstawiliśmy w tab. 5(2).

2. Obliczamy następnie wartości d_{ij} odpowiadające wierszowi zakreślonemu w tab. 4. Stosujemy tu analogicznie równanie jak (*IIa*) zmieniając odpowiednio cyfry stałe w subskryptach:

$$d_{ij} = \frac{b_{5j} - d_{5j}}{b_{51}} \qquad (IIb)$$

lub też

$$d_{ij} = \frac{b_{3j} - d_{3j}}{b_{31}} \qquad (IIb')$$

Kolejne wartości d_{ij} obliczamy więc następująco:

$$d_{10} = \frac{b_{50} - d_{50}}{b_{51}} \quad \text{lub:} \quad d_{10} = \frac{b_{30} - d_{30}}{b_{31}}$$

$$d_{15} = \frac{b_{55} - d_{55}}{b_{51}}$$

$$d_{16} = \frac{b_{56} - d_{56}}{b_{51}}$$

itd.

Tabela 5(2)

Wprowadzenie do planu produktu 1
Obliczenie współczynników d_{ij} dla wierszy nie zakreślonych w tabl. 4

c_j			c_5 0	c_6 0	c_7 0	c_1 3	c_2 2	c_3 4	c_4 1
	P_j	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
c_5 0	P_5	d_{50} 11/7	d_{55} 1	d_{56} —3/14	d_{57} —1/7	d_{51} 0	d_{52} 1/7	d_{53} 0	d_{54} 1/2
c_1	P_1								
c_3 4	P_3	d_{30} 13/7	d_{35} 0	d_{36} —1/14	d_{37} 2/7	d_{31} 0	d_{32} 5/7	d_{33} 0	d_{34} 1/2
z_j									
$z_j - c_j$									

Tabela 5(3)

Drugi plan produkcji
Obliczenie współczynników d_{ij} dla wiersza zakreślonego w tabeli 4
[wiersza P_1 w tabeli 5(1)]
Obliczenie wartości z_j oraz $z_j - c_j$

c_j			c_5 0	c_6 0	c_7 0	c_1 3	c_2 2	c_3 4	c_4 1
	P_j	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
c_5 0	P_5	d_{50} 11/7	d_{55} 1	d_{56} —3/14	d_{57} —1/7	d_{51} 0	d_{52} 1/7	d_{53} 0	d_{54} 1/2
c_1 3	P_1	d_{10} 4/7	d_{15} 0	d_{16} 2/7	d_{17} —1/7	d_{11} 1	d_{12} 1/7	d_{13} 0	d_{14} 0
c_3 4	P_3	d_{30} 13/7	d_{35} 0	d_{36} —1/14	d_{37} 2/7	d_{31} 0	d_{32} 5/7	d_{33} 1	d_{34} 1/2
z_j		z_0 9,14	z_5 0	z_6 4/7	z_7 5/7	z_1 3	z_2 23/7	z_3 4	z_4 2
$z_j - c_j$			$z_5 - c_5$ 0	$z_6 - c_6$ 4/7	$z_7 - c_7$ 5/7	$z_1 - c_1$ 0	$z_2 - c_2$ 9/7	$z_3 - c_3$ 0	$z_4 - c_4$ 1

Obliczone wartości znajdują się w tab. 5(3).

3. Wartości z_j obliczymy przy pomocy równania

$$z_j = d_{5j}c_5 + d_{3j}c_3 + d_{1j}c_1 \qquad (IIIb)$$

Kolejne wartości z_j obliczymy więc następująco

$$z_0 = d_{50}c_5 + d_{30}c_3 + d_{10}c_1$$
$$z_5 = d_{55}c_5 + d_{35}c_3 + d_{15}c_1$$
$$z_6 = d_{56}c_5 + d_{36}c_3 + d_{16}c_1$$

itd.

4. W ostatnim wierszu tabeli 5(3) obliczymy różnice $z_j - c_j$.

Widzimy, że wszystkie $z_j - c_j \geqslant 0$. Oznacza to, że przy środkach produkcji jakimi rozporządzamy, drugi plan produkcji jest planem optymalnym. Wprowadzanie jakichkolwiek dalszych zmian do tego planu nie zwiększyłoby dochodu łącznego, a mogłoby go tylko zmniejszyć.

*

* *

Tablica 5(3) mówi nam, że najwyższy dochód łączny przy rozporządzalnych środkach produkcji (nakładach) osiągniemy gdy (por. wektor P_0) z 4 jednostek ziemi:

11/7 — pozostanie niewykorzystanych
4/7 — przeznaczymy pod uprawę produktu 1
13/7 — „ „ „ „ 3

Dochód łączny (z_0) wyniesie wówczas 9,14 jednostek pieniężnych.

*

* *

Analiza wektorów „w dyspozycji", tj. wektorów P_5, P_6 i P_7 w tabeli planu optymalnego [tu tab. 5(3)] powie nam o opłacalności wprowadzenia nowej jednostki danego środka produkcji dla zwiększenia wielkości planowanej określonego produktu.

Wektor P_5: Ziemia pozostała nie wykorzystana. Zwiększenie obszaru gospodarstwa nie zwiększy możliwości rozszerzenia uprawy produktu 1 (a więc $d_{15} = 0$) ani też produktu 3 (a więc $d_{35} = 0$). W konsekwencji zwiększenie obszaru gospodarstwa nie zwiększy dochodu łącznego ($z_5 = 0$).

Wektor P_6. Dodanie 1 jednostki pracy pozwoliłoby na:

a. zmniejszenie ilości nie wykorzystanej ziemi o 3/14 jednostki (gdyż $d_{56} = -3/14$)
b. zwiększenie powierzchni uprawy produktu 1 o 2/7 jednostki ($d_{16} = 2/7$), przy równoczesnym
c. zmniejszeniu powierzchni uprawy produktu 3 o 1/14 jednostki ($d_{36} = -1/14$).

W rezultacie:

a) zwiększenie powierzchni uprawy produktu 1 o 2/7 jednostki ziemi dałoby dodatkowy dochód w wysokości 6/7 jednostek pieniężnych ($d_{16} \cdot c_1 = 2/7 \cdot 3 = 6/7$);

b) zmniejszenie powierzchni uprawy produktu 3 o 1/14 jednostkę ziemi pociągnęłoby za sobą zmniejszenie dochodu o 2/7 jednostki pieniężne ($d_{36} \cdot c_3 = -1/14 \cdot 4 = -2/7$).

Efektem dodania jednej nowej jednostki pracy byłoby zwiększenie łącznego dochodu o 4/7 jednostki pieniężne ($z_7 = 6/7 - 2/7 = 4/7$).

Wartość z_6 możemy więc traktować jako marginalny dochód z jednostki pracy.

Wektor P_7. Dodanie jednej nowej jednostki kapitału pozwoliłoby na:

a. zmniejszenie ilości nie wykorzystanej ziemi o 1/7 jednostki ($d_{57} = -1/7$)
b. zwiększenie powierzchni uprawy produktu 3 o 2/7 jednostki ziemi ($d_{37} = 2/7$), przy równoczesnym
c. zmniejszeniu powierzchni uprawy produktu 1 o 1/7 jednostki ziemi ($d_{17} = -1/7$).

W rezultacie dałoby to dodatkowy dochód z produktu 3 w wysokości 8/7 jednostek pieniężnych ($d_{37} \cdot c_3 = 2/7 \cdot 4 = 8/7$) oraz zmniejszenie dochodu z produktu 1 w wysokości 3/7 jednostek pieniężnych ($d_{17} \cdot c_1 = -1/7 \cdot 3 = -3/7$).

Efektem dodania jednej jednostki kapitału byłoby zwiększenie łącznego dochodu o 5/7 jednostek pieniężnych ($z_7 = 8/7 - 3/7 = 5/7$). Wartość z_7 możemy więc traktować jako marginalny dochód z jednostki kapitału.

W oparciu o analizę wektorów „w dyspozycji" planu optymalnego oraz cenę jednostki poszczególnych środków produkcji będziemy mogli podjąć decyzję, czy opłaci nam się sięgać po dodatkowe środki dla zwiększenia produkcji.