TERESA MARSZAŁKOWICZ
Szkoła Główna Gospodarstwa
Wiejskiego
Warszawa

WYZNACZANIE TENDENCJI ROZWOJOWEJ DLA WARTOŚCI BEZWZGLĘDNYCH I WZGLĘDNYCH

Tendencję rozwojową jakiegoś zjawiska możemy wyznaczyć dla wartości bezwzględnych lub też względnych. W pierwszym przypadku parametr b równania linii tendencji (przyjmując ogólną postać równania $Y = a + bX$) powie nam o średnim przyroście w okresie w liczbach bezwzględnych; w drugim przypadku — o średnim przyroście w liczbach względnych. Obie informacje są dla nas istotne. Pierwsza z nich pozwala analizować tendencję wzrostu poszczególnego zjawiska; druga natomiast pozwala nam porównywać tempo wzrostu różnych zjawisk. Rozpatrzmy powyższe na przykładzie cen pszenicy, ziemniaków oraz rzepaku i rzepiku.

W tab. 1 zestawiliśmy ceny pszenicy, ziemniaków oraz rzepaku i rzepiku w latach 1950—1961. W tej samej tablicy obliczyliśmy indeksy cen tych ziemiopłodów, przyjmując za podstawę średnią cenę danego ziemiopłodu w całym okresie

Oznaczając symbolem C cenę danego ziemiopodu, symbolem X numer okresu, obliczyliśmy parametry równania linii tendencji[1] cen tych upraw. Otrzymaliśmy następujące równania:

— dla pszenicy $C' = 54{,}316 + 19{,}4245\ X$
— dla ziemniaków $C' = 6{,}044 + 4{,}6295\ X$
— dla rzepaku i rzepiku $C' = 450{,}791 + 29{,}3014\ X$

Ceny pszenicy wzrastały, jak wynika z powyższych równań, w latach 1950—1961 średnio rocznie o 19,42 zł za q, ceny ziemniaków — o 4,63 zł, ceny rzepaku i rzepiku — o 29,30 zł.

Powyższe liczby nie pozwalają nam jednak odpowiedzieć na pytanie, ceny którego ziemiopłodu wzrastały szybciej, a którego wolniej. Poziom cen poszczególnych ziemiopłodów różnił się bowiem bardzo znacznie. Tym samym przyrost ceny w zł za q jest, z punktu widzenia dynamiki wzrostu, nieporównywalny.

By odpowiedzieć na pytanie, dotyczące dynamiki wzrostu cen musimy

---

[1] Nie rozpatrujemy tu problemu, czy założenie prostolinijności tendencji wzrostu cen przyjęte przez nas, jest słuszne. Liczby przytoczone są bowiem jedynie przykładem dla rozpatrzenia pewnego problemu metodologicznego.

obliczyć równania linii tendencji indeksów cen (tab. 1). Wynoszą one (symbolem Y oznaczyliśmy indywidualny, nie procentowy indeks cen):

— dla pszenicy $Y' = 0{,}3008 + 0{,}1076\ X$

— dla ziemniaków $Y' = 0{,}1673 + 0{,}1281\ X$

— dla rzepaku i rzepiku $Y' = 0{,}7030 + 0{,}0457\ X$

Odpowiednie parametry powyższych równań (po przemnożeniu ich przez 100) mówią nam, że w stosunku do średniej ceny w całym badanym okresie, cena pszenicy wzrastała rocznie średnio o 10,77, ziemniaków — o 12,81, rzepaku i rzepiku — o 4,57%. Najszybciej więc wzrastały ceny ziemniaków, najwolniej — ceny rzepaku i rzepiku.

Zamiast obliczać parametry równania linii tendencji na podstawie indeksów cen możemy się posłużyć metodą skróconą dla ich wyznaczenia.

Parametry równania linii tendencji dla cen w wartościach bezwzględnych obliczamy przy pomocy następujących wzorów:[1]

$$b = \frac{\Sigma\,[(C-\bar{C})\,(X-\bar{X})]}{\Sigma\,(X-\bar{X})^2} \tag{1a}$$

$$a = \bar{C} - b\bar{X} \tag{1b}$$

Tabela 1

Ceny skupu pszenicy, ziemniaków oraz rzepaku i rzepiku w zł w latach 1950—1961

Rok	Cena skupu w zł za q[a]			Wskaźnik nieprocentowy ceny Średnia cena w latach 1950—1961 = 1		
	pszenica	ziemniaki	rzepak i rzepik	pszenica	ziemniaki	rzepak i rzepik
1	2	3	4	5	6	7
1950	103,4	20,26	534,8	0,5726	0,5607	0,8340
1951	101,8	19,20	526,5	0,5638	0,5313	0,8211
1952	101,7	22,17	526,3	0,5632	0,6135	0,8207
1953	103,6	20,94	535,9	0,5737	0,5795	0,8357
1954	117,7	23,80	533,1	0,6518	0,6586	0,8313
1955	137,0	22,87	649,6	0,7587	0,6329	1,0130
1956	190,2	30,60	641,3	1,0533	0,8468	1,0001
1957	263,3	37,56	653,1	1,4581	1,0394	1,0185
1958	266,8	53,65	716,3	1,4775	1,4847	1,1170
1959	264,0	54,78	788,6	1,4620	1,5160	1,2298
1960	262,2	63,47	786,4	1,4520	1,7564	1,2264
1961	255,2	64,33	803,1	1,4133	1,7802	1,2524
Średnio[b]	180,575	36,1358	641,250	1,0000	1,0000	1,0000

[a] Zestawiono na podstawie: Statystyki Rolnictwa 1946—1957 (Statystyka Polski, Zeszyt 46, Warszawa 1961), Roczników Statystycznych GUS oraz danych nie publikowanych GUS

[b] Średnie podano z dużą dokładnością ze względu na dalsze obliczenia.

[1]) W praktyce będziemy się oczywiście posługiwać przy obliczaniu parametru b wzorem skróconym:

$$b = \frac{\Sigma\,CX - n\,(\bar{C})\,(\bar{X})}{\Sigma\,X^2 - n\,(\bar{X})^2} = \frac{\Sigma\,CX - (\Sigma C)\,(\bar{X})}{\Sigma X^2 - (\Sigma X)\,(\bar{X})}$$

gdzie: C — cena w złotych w roku
$\overline{C}$ — średnia cena w całym okresie
X — numer roku
$\overline{X}$ — średni numer roku

Parametry równania linii tendencji dla indeksów cen (oznaczamy te parametry odpowiednio A i B) obliczymy:

$$B = \frac{\Sigma\,[(Y - \overline{Y})\,(X - \overline{X})]}{\Sigma\,(X - \overline{X})^2} \tag{2a}$$

$$A = \overline{Y} - B\overline{X} \tag{2b}$$

gdzie: Y — indywidualny indeks cen (nie procentowy) przyjmując za podstawę średnią cenę w całym okresie

Będziemy więc mieli:

$$Y = \frac{C}{\overline{C}}$$

$$\overline{Y} = 1 = \text{średni indeks cen}$$

Przekształcając wzór (2a) otrzymamy:

$$B = \frac{\sum\left[\left(\frac{C}{\overline{C}} - 1\right)(X - \overline{X})\right]}{\Sigma\,(X - X)^2}$$

a dalej:

$$B = \frac{\sum\left[\frac{C - \overline{C}}{\overline{C}}\,(X - \overline{X})\right]}{\Sigma\,(X - \overline{X})^2}$$

Wyciągamy $\frac{1}{\overline{C}}$ przed znak Σ

$$B = \frac{\frac{1}{\overline{C}}\,\Sigma\,[(C - \overline{C})\,(X - \overline{X})]}{\Sigma\,(X - \overline{X})^2}$$

a następnie mnożymy obie strony równania przez $\overline{C}$

$$B\overline{C} = \frac{\Sigma\,[(C - \overline{C})\,(X - \overline{X})]}{\Sigma\,(X - \overline{X})^2}$$

Ponieważ prawa strona równania ostatniego jest taka sama jak równania (1a), będziemy mieli:

$$B\overline{C} = b$$

a wreszcie:

$$B = \frac{b}{\overline{C}} \tag{3a}$$

Podobnie będziemy mieli podstawiając do równania (2b) odpowiednie wielkości

$$A = 1 - \frac{b}{\bar{C}}\,\bar{X}$$

a dalej:

$$A = \frac{\bar{C} - b\bar{X}}{\bar{C}}$$

$$A\bar{C} = \bar{C} - b\bar{X}$$

Ponieważ prawa strona równania ostatniego jest taka sama jak równania (1b), będziemy mieli:

$$A\bar{C} = a$$

a wreszcie:

$$A = \frac{a}{\bar{C}} \tag{3b}$$

Jak z powyższego wynika, w celu obliczenia parametrów równania linii tendencji dla indeksów, nie musimy indeksów tych wcale obliczać. Parametry równania linii tendencji dla indeksów cen możemy bowiem otrzymać bezpośrednio z parametrów równania linii tendencji dla cen w ich wartościach bezwzględnych. Parametry linii tendencji dla indeksów cen są bowiem ilorazami odpowiednich parametrów linii tendencji dla cen w ich wartościach bezwzględnych przez średnią cenę w okresie.

W naszym przykładzie będziemy więc mogli obliczyć bezpośrednio parametry równania linii tendencji indeksów cen.
dla pszenicy:

$$B = \frac{b}{\bar{C}} = \frac{19{,}4245}{180{,}575} = 0{,}1076$$

$$A = \frac{a}{\bar{C}} = \frac{54{,}316}{180{,}575} = 0{,}3008$$

dla ziemniaków:

$$B = \frac{b}{\bar{C}} = \frac{4{,}6295}{36{,}1358} = 0{,}1281$$

$$A = \frac{a}{\bar{C}} = \frac{6{,}0440}{36{,}1358} = 0{,}1673$$

dla rzepaku i rzepiku:

$$B = \frac{b}{\bar{C}} = \frac{29{,}3014}{641{,}250} = 0{,}0457$$

$$A = \frac{a}{\bar{C}} = \frac{450{,}791}{641{,}250} = 0{,}7030$$

Jest rzeczą oczywistą, że jeżeli obliczymy najpierw parametry równania linii tendencji dla indeksów cen, to parametry równania linii tendencji dla cen w ich wartościach bezwzględnych możemy obliczyć jako odpowiednie ilorazy.

Łatwo wykazać przy pomocy analogicznych jak wyżej przekształceń, że będziemy mogli również obliczyć powyższą metodą parametry równania linii tendencji dla indeksów, w których za podstawę przyjęto nie koniecznie średnią wartość danego zjawiska, ale jego dowolną wartość, np. jego poziom w jednym z okresów. Jeżeli symbolem P oznaczymy wartość przyjętą za podstawę przy obliczaniu indesków, wzory (3a) i (3b) przyjmą postać:

$$B = \frac{b}{P} \tag{3c}$$

$$A = \frac{a}{P} \tag{3d}$$

Postać powyższa wzorów jest postacią ogólną, gdyż za P możemy podstawić zarówno średnią wartość badanego zjawiska w całym badanym czasokresie, jak i każdą inną dowolną wartość.

Poprawność powyższej metody obliczania parametrów linii tendencji dla liczb względnych z parametrów linii tendencji dla liczb bezwzględnych możemy wykazać również inaczej. Równanie linii tendencji dla liczb bezwzględnych możemy zapisać

$$C' = a + bX$$

Dzieląc obie strony równania przez wartość P otrzymamy:

$$\left(\frac{C}{P}\right)^{\prime} = \frac{a}{P} + \frac{b}{P}\, X$$

Jeżeli więc przyjmiemy $\frac{C}{P}$ jako jednopodstawowy indywidualny indeks cen, to paramerty równania linii tendencji dla tych indeksów obliczymy dzieląc odpowiednie parametry równania linii tendencji dla liczb bezwzględnych (cen w złotych) przez cenę, którą przyjęliśmy za podstawę przy obliczaniu indeksów. Jeżeli więc będziemy chcieli stwierdzić na przykład o ile średnio względnie wzrastała cena danego ziemiopłodu w okresie w stosunku do ceny w okresie pierwszym, to obliczymy:

$$B = \frac{b}{C_1}$$

$$A = \frac{a}{C_1}$$

gdzie C_1 = cena w okresie pierwszym

Uproszczenie obliczeń w przedstawionej metodzie wyznaczania parametrów równania linii tendencji dla liczb względnych polega, jak wykazaliśmy wyżej, na tym, że **nie potrzebujemy wcale liczyć indeksów indywidualnych dla wszystkich okresów. Niemniej możemy obliczyć bezpośrednio parametry równania linii tendencji dla tych indeksów.**

* *
*

Analogicznie jak dla linii tendencji, parametry równania krzywej tendencji dla indeksów cen możemy obliczać z parametrów równania krzywej tendencji dla wartości bezwzględnych, tj. dla cen w złotych.

Równanie krzywej tendencji cen ziemniaków wynosi — dla wartości bezwzględnych:

$$C' = 20,26 - 1,4633X + 0,4687X^2$$

dla wartości względnych (nie procentowych indeksów cen):

$$Y' = 0,56 - 0,0405X + 0,0130X^2$$

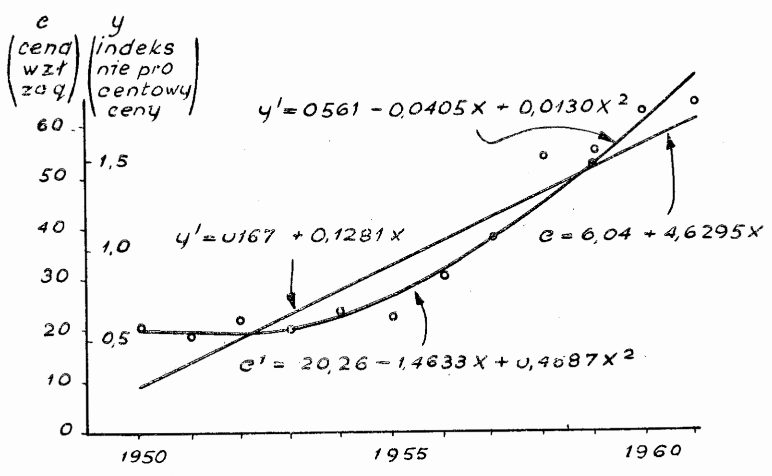
Jak łatwo sprawdzić:

$$A = \frac{a}{\bar{C}} = \frac{20,26}{36,1358} = 0,56$$

$$B = \frac{b}{\bar{C}} = \frac{-1,4633}{36,1358} = -0,0405$$

$$D = \frac{d}{\bar{C}} = \frac{0,4687}{36,1358} = 0,0130$$

Analogiczna zależność pomiędzy parametrami wystąpi w przypadku krzywych wyższych stopni.



Wykres 1. Tendencja wzrostu cen ziemniaków

Na wykresie 1 pokazaliśmy przebieg tendencji rozwojowej cen ziemniaków dla wartości bezwzględnych i dla wartości względnych. Jak widzimy położenie linii tendencji (czy krzywej tendencji) dla wartości bezwględnych i względnych jest analogiczne — z chwilą gdy odpowiednio dobierzemy skale sprzężone. Gdy wielkości skali Y są równe wielkościom skali C, podzielonym przez $\bar{C}$, mamy do czynienia faktycznie z jedną linią prostą (czy też jedną krzywą), która pokazuje tendencję wzrostu cen zarówno dla liczb bezwzględnych jak i względnych. Jest rzeczą jasną, że dla jednej i tej samej prostej (czy krzywej) inne mamy parametry równania gdy rozpatrujemy ją w skali *C*, inne w skali *Y*. Stąd właśnie parametry równania linii tendencji są odmienne dla wartości bezwzględnych i dla wartości względnych.

* *
*

Powyższa metoda obliczania parametrów równania linii tendencji dla wartości względnych może być stosowana nie tylko w odniesieniu do cen, ale w odniesieniu do wszelkich zjawisk, których tempo przyrostu chcemy porównywać.

W tab. 2 zestawiliśmy dane dla wartości produkcji globalnej, z podziałem na produkcję roślinną i zwierzęcą. Równania trendów wynoszą (symbolem *W* oznaczyliśmy wartości produkcji):

— dla produkcji roślinnej $W' = 56418 + 3049\,X$
— dla produkcji zwierzęcej $W' = 26021 + 3078\,X$
— dla całej produckji globalnej $W' = 82438 + 6127\,X$

Produkcja roślinna wzrastała więc średnio o 3049 mln zł rocznie, produkcja zwierzęca — o 3076 mln zł, razem produkcja globalna — o 6127 mln zł.

Przyrost względny w roku w stosunku do średniego poziomu w całym badanym czasokresie możemy obliczyć bezpośrednio stosując wyprowadzone wyżej wzory (oznaczając symbolem B średni nie procentowy przyrost względny). Będziemy mieli:

— dla produkcji roślinnej $B = \dfrac{3049}{82333} = 0{,}0370$

— dla produkcji zwierzęcej $B = \dfrac{3078}{52183} = 0{,}0590$

— dla całej produkcji globalnej $B = \dfrac{6127}{134517} = 0{,}0455$

Średnio roczny przyrost wynosił więc dla produkcji roślinnej 3,70% jej średniego poziomu w latach 1946—1961, dla produkcji zwierzęcej — 5,90%, dla całej produkcji globalnej — 4,55%. Po obliczeniu analogicznie parametrów *A* równania linii tendencji dla indeksów produkcji (według wzoru 3b) będziemy mieli następujące równania:

— dla produkcji roślinnej $Y' = 0{,}6852 + 0{,}0370\,X$
— dla produkcji zwierzęcej $Y' = 0{,}4986 + 0{,}0590\,X$
— dla całej produkcji globalnej $Y' = 0{,}6128 + 0{,}0455\,X$

gdzie *Y* jest indeksem wartości produkcji, w którym za podstawę przyjęto średnią wartość produkcji (odpowiednio roślinnej, zwierzęcej lub razem) w latach 1946—1961.

Stosując wzory (3c) i (3d) moglibyśmy również obliczyć parametry równania linii tendencji dla indeksów wartości produkcji, w których za podstawę przyjęlibyśmy np. poziom produkcji w 1946 r. lub 1949, lub 1950 r. itd.

Tabela 2

Produkcja globalna rolnictwa w cenach porównywalnych w latach 1946—1961 [a]

Rok	Produkcja roślinna	Produkcja zwierzęca	Ogółem produkcja globalna
1	2	3	4
1946	42991	20295	63286
1947	61206	27991	89197
1948	70616	33829	104445
1949	81703	42275	123978
1950	82686	50644	133330
1951	74538	48911	123449
1952	77098	48682	125780
1953	77069	52050	129119
1954	83359	53355	136714
1955	83864	56268	140132
1956	90625	59854	150479
1957	92313	64367	156680
1958	94232	67126	161358
1959	92901	66966	159867
1960	100252	68225	168477
1961	111881	74092	134516
Średnio	82333	52183	134516

[a] Zestawiono na podstawie: Statystyki Rolnictwa (Statystyka Polska, Zeszyt 46, Warszawa 1961) oraz Roczników Statystycznych GUS.

* * *

Analogicznie jak parametry równania linii tendencji dla wartości względnych, tak i średnie odchylenie od niej możemy obliczyć na podstawie średniego odchylenia od linii tendencji w liczbach bezwzględnych.

Średnie odchylenie od linii tendencji w liczbach bezwzględnych obliczamy [1]:

$$S_{CX} = \sqrt{\frac{\Sigma (C - C')^2}{n}} \tag{4}$$

a od linii tendencji w liczbach względnych:

$$S_{YX} = \sqrt{\frac{\Sigma (Y - Y')^2}{n}} \tag{5}$$

[1] W praktyce przy wykonywaniu obliczeń posłużymy się oczywiście wzorem skróconym:

$$S_{CX} = \sqrt{\frac{\Sigma C^2 - n(\bar{C})^2 - b\,[\Sigma CX - n(\bar{C})\,(\bar{X})]}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma C^2 - (\Sigma C)\,\bar{C} - b\,[\Sigma CX - (\Sigma C)\,(\bar{X})]}{n}}$$

Wszystkie wartości z wyjątkiem ΣC^2 obliczyliśmy już przy znajdywaniu równania linii tendencji.

$$\text{ponieważ } Y = \frac{C}{\bar{C}}, \text{ więc:}$$

$$S^2_{XY} = \frac{\sum\left(\frac{C}{\bar{C}} - \frac{C'}{\bar{C}'}\right)^2}{n}$$

Ze względu na to, że $\bar{C}' = \bar{C}$ będziemy dalej mieli:

$$S_{XY}{}^2 = \frac{\sum\left[\left(\frac{1}{\bar{C}}\right)^2 (C - C')^2\right]}{n}$$

$$S_{XY}{}^2 = \frac{\left(\frac{1}{\bar{C}}\right)^2 \Sigma (C - C')^2}{n}$$

$$S_{YX}{}^2\bar{C}^2 = \frac{\Sigma (C - C')^2}{n}$$

a wreszcie:

$$S_{YX} = \frac{S_{CX}}{\bar{C}} \tag{6}$$

Uogólniając powyższą równość na indeksy, w których za podstawę przyjęto poziom zjawiska w dowolnym okresie otrzymamy:

$$S_{YX} = \frac{S_{CX}}{P} \tag{6a}$$

Średnie odchylenie od linii tendencji cen w liczbach bezwzględnych wynosi w naszym przykładzie:

— dla pszenicy $S_{CX} = 28{,}53$ zł
— dla ziemniaków $S_{CX} = 6{,}17$ zł
— dla rzepaku i rzepiku $S_{CX} = 32{,}34$ zł

Średnia różnica cen rzeczywistych od cen obliczonych z równania trendu była więc najwyższa dla rzepaku i rzepiku, najniższa dla ziemniaków.

Po podzieleniu powyższych wielkości odpowiednio przez średnią cenę danego ziemiopłodu otrzymamy średnie odchylenie od linii tendencji indeksów cen (w których za podstawę przyjęto średnią cenę w całym czasokresie). Liczbowo będziemy mieli:

— dla pszenicy $S_{YX} = 0{,}158$
— dla ziemniaków $S_{YX} = 0{,}171$
— dla rzepaku i rzepiku $S_{YX} = 0{,}050$

Średnie odchylenie rzeczywistego indeksu cen od obliczonego z równania trendu wynosi (po przemnożeniu powyższych wartości przez 100): dla pszenicy 15,8%, dla ziemniaków 17,1%, dla rzepaku i rzepiku tylko 5,0%. Odwrotnie więc niż dla wartości bezwzględnych średnie odchylenie dla indeksów cen było najniższe dla rzepaku i rzepiku, najwyższe natomiast dla ziemniaków.

Te same wartości otrzymalibyśmy oczywiście obliczając średnie odchylenie wartości rzeczywistych od wartości obliczonych z równania trendu dla wartości bezwzględnych, ale indeksów cen dla odpowiednich ziemiopłodów.

Jak z wzoru (6) wynika średnie odchylenie od linii tendencji indeksów cen (wktórym za podstawę przyjęto średnią cenę w całym czasokresie) jest identyczne z odchyleniem względnym od linii tendencji dla wartości bezwzględnych.

Możemy to zapisać przyjmując oznaczenia jak wyżej:

$$V\sigma = \frac{S_{CX}}{\overline{C}} = S_{YX} \tag{7}$$

W ten sam sposób moglibyśmy oczywiście obliczyć średnie odchylenie od linii tendencji w liczbach bezwzględnych i względnych dla produkcji globalnej.

ТЕРЕЗА МАРШАЛКОВИЧ
Центральная Сельскохозяйственная Академия
Варшава

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ ДЛЯ АБСОЛЮТНЫХ И ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Содержание

Тенденцию развития какого-нибудь явления можем определить для абсолютных или относительных величин. В первом случае параметр в уравнения линии тенденции (принимая общий вид уравнения $Y = a + bX$) говорит о среднем приросте за данный период в абсолютных числах; во втором случае средний прирост выражен в относительных числах. Каждая из этих информации имеет существенное значение. Первая позволяет анализировать тенденцию роста каждого отдельного явления; вторая же-сравнивать темп роста различных явлений.

В статье показано как на основе параметров уравнения линии тенденции для абсолютных чисел можно непосредственно расчитать параметры уравнения линии тенденции для относительных чисел. Упрощенный метод расчета параметров обобщен на случай криволинейных тенденций.

TERESA MARSZAŁKOWICZ
Agricultural University
Warsaw

DETERMINATION OF DEVELOPMENT TRENDS FOR ABSOLUTE RELATIVE QUANTITIES

Summary

The development trend of a phenomenon may be ranged out for absolute or relative quantities. In the first case the parameter of trend

line equation (we are taking the equation of general shape $Y = a + bX$) informs us of the average increment during a period in absolute numbers; in the second case — of the average in relative ones. Both informations are essential for us. The former allows to analyse the increase trend of an individual phenomenon; on the other hand, the latter — to compare the increase rate of growth of various phenomena.

The problem has been demonstrated in the article, how basing on the parameters of trend line equation of absolute numbers, the parameters for trend line equation of relative numbers might be directly computed. The simplified method of computation of parameters has been generalized for the case of courve lined trends.