ALICJA KASZUBA-CYBURA
Instytut Ekonomiki Rolnej
Warszawa

W SPRAWIE KONKURENCJI MIĘDZY ZIEMIOPŁODAMI

Część II

Jeśli z bogatej i obfitującej w różne zagadnienia problematyki konkurencji między ziemniopłodami w gospodarstwie rolnym wyeksponować pytanie: **ile ziemniopłodów (dopuszczalnych w produkcji danego gospodarstwa ze względów glebowych i klimatycznych) konkuruje ze sobą o czynniki produkcji — ziemię, kapitał i pracę** — i jeśli przyjąć za kryterium oceny wielkość masy dochodu [1] jaką zapewniają poszczególne kombinacje upraw, to odpowiedzi na tak postawione pytanie można szukać w dwóch aspektach: ilościowym, ograniczającym się do stwierdzenia ile upraw należy wprowadzić do produkcji, by zapewnić gospodarstwu maksymalny dochód oraz jakościowym, pozwalającym na ukazanie przyczyn takiego a nie innego rozwiązania ilościowego.

Dwa te aspekty są ze sobą ściśle związane i wzajemnie się uzupełniają, zatem ich wyodrębnianie jest w dużej mierze umowne. Rozpatrując jednak rzecz w aspekcie drugim można abstrahować od pierwszego, nie można natomiast ograniczyć się tylko do zwężonego spojrzenia na problem konkurencyjności między ziemiopłodami. W tym opracowaniu zajmiemy się problemem konkurencyjności między ziemniopłodami, głównie ze względu na przyczynowe pogłębienie problemu, rozpatrywanego w I części opracowania[2]. Artykuł niniejszy stanowi zarazem próbę uogólnienia stwierdzeń, jakie zostały dokonane w artykule poprzednim. Podobnie jak w poprzednim artykule postawiono pytanie: ile upraw musi wprowadzić do produkcji gospodarstwo, jeśli chce zapewnić sobie osiągnięcie maksymalnego dochodu i jeśli w swej działalności ograniczone jest występowaniem pewnym limitów trzech czynników produkcji ziemi, pracy i kapitału.

Tak postawione pytanie wywodzi się w prostej linii z problematyki programowania liniowego, bowiem zawiera w sobie wszystkie elementy, z których składa się standardowy program liniowy. W pytaniu tym za-

---

[1] Mamy tu na uwadze dochód globalny. Oczywiście w konkretnych rozwiązaniach programu liniowego można maksymalizować dochód czysty.

[2] A. Kaszuba-Cybura: W sprawie konkurencji między ziemiopłodami, Zagadnienia Ekonomiki Rolnej, 4/1963.

warte jest określenie funkcji celu, idzie bowiem o zmaksymalizowanie masy dochodu osiąganej z określonej działalności produkcyjnej. Określone są również warunki zgodności programu, mianowicie funkcja celu ma być zrealizowana w warunkach ograniczania działalności produkcyjnej przez istnienie w gospodarstwie naturalnych ograniczeń takich, jak ściśle określony areał uprawny, zasoby robocizny i zasoby przeznaczone na nakłady materiałowo-pieniężne.

Nie ulega zatem wątpliwości, że dysponujemy przy badaniu problemu konkurencyjności między ziemiopłodami w gospodarstwie rolnym ściśle określonym i wypróbowanym narzędziem poznawczym, jakim jest programowanie liniowe. W przypadku tym zresztą interesuje nas bardziej teoretyczna niż metodologiczna strona programowania liniowego, a to dlatego, że sięgnięcie w teorię programowania liniowego pozwala ujrzeć i rozwiązać problem, zarówno od strony przyczynowej, jak i ilościowej.

Uczyńmy więc standardowy program liniowy punktem wejścia w teorię programowania liniowego[1]:

Standardowy program liniowy składa się z następujących elementów:

1. Warunku optymalności wyrażonego w funkcji celu. Funkcja celu ma formę liniową i jest typu:

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

   Funkcja ta w programie liniowym osiąga wartość minimalną lub maksymalną, tj. $z = \max.$ lub $z = \min.$
2. Warunków zgodności programu liniowego, wyrażonych w formie liniowych relacji (nierówności lub równości).
3. Warunków brzegowych wynikających z natury zmiennych badanych, wchodzących w skład warunku optymalności i warunków zgodności programu. Orzekają one, że np. $x_n \geqslant 0$.

Warunek optymalności i warunki zgodności programu przy zachowaniu warunków brzegowych mają zostać rozwiązane i spełnione przez n zmiennych, które stanowią zespół alternatyw interesujących w danym badaniu.

Z teorii zbiorów wypukłych, na których opierają się metody programowania liniowego wynika, że w poszukiwaniu rozwiązania programu należy w pierwszym rzędzie skoncentrować się na badaniu ekstremalnych punktów zbioru wypukłego. Wchodzą one w skład zbioru rozwiązań dopuszczalnych[2], a wśród nich następnie poszukiwać takiego punktu, który stanowi rozwiązanie optymalne, tzn. spełnia również warunek optymalności określony w programie liniowym badania.

Jeśli liczba n zmiennych występujących w programie liniowym jest większa od liczby m warunków dodatkowych (lub inaczej macierz, w postaci której możemy zapisać relacje liniowe jest prostokątna, tzn. ma wymiary $n \times m$, przy czym $n > m$), to istnieje wiele (teoretycznie nie-

---

[1] Teorię programowania liniowego zaczerpnięto z następujących prac: O. Lange: Wstęp do ekonometrii, PWN, Warszawa 1958; R. G. D. Allen: Ekonomia matematyczna, PWN, Warszawa 1961; I. Nykowski: Metoda simplex w programowaniu liniowym, Przegląd Statystyczny, nr 3—4 1958 r.

[2] Układ warunków zgodności programu zapisany w formie algebraicznej dostarcza nam rozwiązań, które tworzą zbiór rozwiązań dopuszczalnych.

skończenie wiele) dopuszczalnych optymalnych rozwiązań programu. Jeśli natomiast liczba n zmiennych równa się liczbie m warunków zgodności ($m = n$), to mamy do czynienia z macierzą kwadratową o wymiarach $n \times n$. Jeśli przy tym macierz ta jest nieosobliwa, (jej wyznacznik jest różny od zera) to istnieje tylko jedno rozwiązanie dopuszczalne i ono jest zarazem rozwiązaniem optymalnym[1].

Jak wynika z powyższego, zależność między liczbą zmiennych i liczbą warunków zgodności programu wywiera zasadniczy wpływ na liczbę rozwiązań optymalnych, co jest niewątpliwie ważne dla obiektu gospodarującego. W przypadku jednego optymalnego rozwiązania przedsiębiorstwo w swych poczynaniach jest zdeterminiwane do użycia tylko jednego wariantu produkcji narzuconego tym rozwiązaniem. Natomiast w przypadku wielu rozwiązań optymalnych jest bardziej swobodne w swych decyzjach. Z tego względu wydaje się być interesująca bliższa analiza zależności między liczbą zmiennych i liczbą warunków dodatkowych.

Co dla tego problemu wynika z twierdzeń teorii zbiorów wypukłych? Znane są w teorii zbiorów wypukłych następujące twierdzenia i własności, dostatecznie naświetlające to zagadnienie:

Niech będą dane w przestrzeni m wymiarowej n punktów: $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots \ldots p^{(n)}$ [2].

Dla tych punktów ważne są następujące udowodnione twierdzenia:

1. Spośród n punktów $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots p^{(n)}$ w m wymiarach może być nie więcej niż m punktów niezależnych liniowo.

Ważne jest również drugie twierdzenie:

2. Punkty $p^{(r)}$ ($r = 1, 2, \ldots m$) są niezależne. Dowolny punkt $p^{(s)}$ ($s = 1, 2, \ldots n$) można wtedy przedstawić jako wypukłą kombinację tych punktów:

$$p^{(s)} = \sum_{r=1}^{m} x_{rs} p^{(R)}$$

Interesujące są też następujące własności zbiorów wypukłych:

a. gdy dane są punkty p i $p^{(s)}$ ($s = 1, 2, \ldots n$) w m — wymiarach, to nieujemne punkty $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ [3], które spełniają warunek: $\sum_{s=1}^{n} \lambda_s p^{(s)} = p$ obejmują zbiór wypukły Γ w n wymiarach. Zbiór Γ jest wtedy zbiorem dopuszczalnych rozwiązań powyższej równości. Wśród dopuszczalnych rozwiązań poszukujemy rozwizań ekstremalnych. Będą one punktami ekstremalnymi powłoki wypukłej zbioru Γ.

b. Punkt $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ jest ekstremum zbioru Γ wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $p^{(s)}$ mające wagi dodatnie ($\lambda > 0$) tworzą zbiór liniowo niezależny wśród wszystkich punktów $p^{(s)}$ ($s = 1, 2, \ldots n$). Pozostałe p mają wagi zerowe.

Ponieważ z twierdzenia 1 i 2 wynika, że wśród punktów $p^{(s)}$ ($s = 1, 2, \ldots n$) może być co najwyżej m punktów $p^{(r)}$ ($r = 1, 2, \ldots m$) niezależ-

[1] a. R. G. D. Allen: Ekonomia matematyczna, PWN Warszawa 1961, s. 495. O. Lange: Wstęp do ekonomii, PWN Warszawa 1958, s. 432.

[2] Punkty $p^{(n)}$ rozumiane są tu jako wektory m — wymiarowe.

[3] Symbol λ przyjęto dla oznaczenia punktów ekstermalnych zbioru wypukłego, utworzonego w przestrzeni przez warunki zgodności programu.

nych liniowo, zatem punkt λ, który jest punktem ekstremalnym nie może mieć więcej niż m wag dodatnich i co najmniej $n - m$ wag zerowych.

Zatem wniosek z tych twierdzeń i własności jest dla nas niewątpliwy: funkcja celu, która w programie liniowym jest warunkiem optymalności rozwiązania programu przybiera wartości optymalne w takim punkcie ekstremalnym zbioru rozwiązań dopuszczalnych, który składa się z m wag dodatnich, tzn. dodatnich wielkości zmiennych i $n—m$ wag zerowych. Zatem jeśli przestrzeń potrzeb w programie jest m — wymiarowa, tzn. mamy do spełnienia m warunków zgodności programu, to co najwyżej m spośród n zmiennych może wejść w skład rozwiązania, reszta zmiennych, tj. $n—m$ przybierze wartości zerowe.

A więc przykładowo:

Niech funkcja zawierająca warunek optymalności będzie:

$$1.\ L = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

i niech będą dane warunki zgodności programu:

$$2.\ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{array}$$

to z warunków zgodności programu zapisanych w formie nierówności można przejść do równości wprowadzając zmienne sztuczne (posiadające określoną interpretację ekonomiczną):

$$3.\ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{array}$$

Zatem pierwotna liczba naszych zmiennych decyzyjnych zostanie zwiększona o tyle zmiennych sztucznych, ile jest warunków zgodności programu. Zatem mamy liczbę zmiennych: $N = n + m$. Z twierdzeń teorii zbiorów wypukłych wynika, że spośród N zmiennych tylko m zmiennych może wejść do rozwiązania optymalnego jako dodatnie wagi punktu ekstremalnego w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych. Reszta zmiennych przybierze wartości zerowe.

Na ogół możliwe są dwa przypadki:

1. Wśród m zmiennych mogą wystąpić, zarówno zmienne decyzyjne, jak i zmienne sztuczne, nigdy jednak łączna ich liczba nie może przekroczyć m. Jeśli w relacjach liniowych zapisujących warunki zgodności programu pewne są równościami a inne nierównościami, to w rozwiązaniu wśród m zmiennych będziemy mieli tyle pierwotnych zmiennych decyzyjnych, ile było równości i tyle zmiennych sztucznych, ile było nierówności.

2. Do rozwiązania mogą wejść również same tylko zmienne decyzyjne. Może to się zdarzyć tylko wtedy, gdy wszystkie nierówności zapisujące warunki zgodności programu były równościami. Wtedy zmienne sztuczne przybiorą wartości zerowe, punkt ekstremalny będzie miał m wag dodatnich spośród n zmiennych decyzyjnych. Jednak jest to przypadek wyjątkowy i na ogół punkt ekstremalny wśród wag dodatnich zawiera, zarówno zmienne decyzyjne, jak i zmienne sztuczne.

Praktycznie w sytuacji, np. przedsiębiorstwa programującego pewien asortyment produkcji w przypadku pierwszym z omówionych, można powiedzieć, że jeśli z układu współczynników technicznych i wielkości zasobów wynikają takie dla nich powiązania, iż niektóre z zasobów dadzą się w pełni wykorzystać (relacja liniowa jest wtedy równaniem), to liczba zmiennych wybranych do produkcji będzie się równała liczbie wykorzystanych zasobów. Mówi o tym R. G. D. Allen [1], dopatrując się zależności między liczbą stosowanych procesów (procesy w jego przykładach spełniają rolę zmiennych), a rzadkością wykorzystanych czynników produkcji. Przy tym przez czynnik rzadki rozumie on taki czynnik produkcji, który względem układu współczynników technicznych występuje w minimum i jest w pełni wykorzystany. Pozostałe czynniki nie są rzadkie, tzn. występują we względnym nadmiarze. Oznacza to, że w rozwiązaniu logarytmu *simplex* pojawia się tyle zmiennych sztucznych, ile jest niewykorzystanych zasobów.

Przypadek gdy wszystkie nierówności liniowe zapisujące standardowy program liniowy są równościami uważany jest za wyjątkowy. Rzeczywiście oznaczałoby to, że zaistniał taki zbieg okoliczności wynikający z przyjętych współczynników technicznych i zasobów, iż wszystkie nierówności mogą być zapisane jako równości bez wprowadzania zmiennych sztucznych. Dla przedsiębiorstwa oznaczałoby to, że znalazło się w tak pomyślnej sytuacji, że jest w stanie maksymalnie wykorzystać posiadane czynniki produkcji przy jednoczesnym zapewnieniu sobie maksymalnego dochodu.

Doświadczenie własne i przegląd literatury potwierdza, że taki przypadek jest rzeczywiście niezmiernie rzadki. Aby otrzymać tego typu rozwiązanie, trzeba je sobie uprzednio zapewnić. Sprowadzałoby się to do tego, że zamiast wychodzić od danych współczynników technicznych i zasobów i dochodzić do liczby zmiennych, należałoby postąpić odwrotnie. Dla uzyskania interesującego nas wyniku należałoby przyjąć współczynniki techniczne, założyć pożądane wartości zmiennych decyzyjnych i w ten sposób dojść do określenia zasobów. Jeśli nie stosować tego zabiegu, to można rozwiązać wiele wariantów programów liniowych i nie trafić na rozwiązanie pożądane. Niemniej podajemy przykład takiego rozwiązania.

Załóżmy, że mamy przedsiębiorstwo rolne. Warunki gospodarowania tego gospodarstwa są następujące:

1. Powierzchnia uprawy wynosi 100 ha.
2. Potencjał pracy wynosi 450 r/dni.
3. Gotówkowe zasoby przeznaczone na zakup nawozów sztucznych wynoszą 3000 zł.

Załóżmy też, że na glebach tego gospodarstwa można uprawiać 6 upraw. Niech p_n oznaczają pracochłonności poszczególnych upraw, s_n oznaczają kapitałochłonności tychże upraw. Wprowadźmy też d_n na oznaczenie dochodowości poszczególnych upraw. Uczyńmy również założenie, że nakłady zarówno pracy, jak i kapitału na 1 ha są stałe. Również dochodowości z 1 ha dla poszczególnych upraw są stałe.

Jakie z 6 upraw ma produkować przedsiębiorstwo, by zapewnić sobie uzyskanie maksymalnej masy dochodu, dążąc do pełnego wykorzystania posiadanych czynników produkcji?

[1] R. G. D. Allen: op. cit., s. 624.

Niech p_n, s_n, d_n przybiorą wartości konkretne:

	p_n	s_n	d_n
U_i	5	40	32
U_2	3	25	20
U_3	6	30	20
U_4	4	26	18
U_5	8	28	14
U_6	10	27	25

Wobec uczynionych założeń możemy dokonać zapisów na określenie funkcji celu i warunków zgodności programu:

$$L = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = max.$$

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 8x_5 + 10x_6 \leqslant 450$$
$$10x_1 + 25x_2 + 30x_3 + 26x_4 + 28x_5 + 27x_6 \leqslant 3000$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leqslant 100$$
$$x_i > 0$$

Wprowadźmy dane z układu nierówności w tablicę *simplex*. Pierwszym etapem jest takie rozwiązanie dopuszczalne, przy którym punkt ekstremalny ma m wag dodatnich będących zmiennymi sztucznymi. Dalsze etapy powstają kolejno z poprzednich w drodze zastępowania zmiennych mniej efektywnych przez bardziej efektywne, tj. takich, które mają mniejsze krańcowe przyrosty funkcji celu przez takie, których krańcowe przyrosty funkcji celu są większe. Ostatnie wiersze kolejnych etapów tj. $d_i - c_i$ informują, które z wektorów spoza bazy należy wprowadzić do bazy. Natomiast ostatnia kolumna $\frac{x_i}{x_{ik}}$ wskazuje na ten wektor bazy, który należy jako najmniej efektywny z bazy usunąć. Wszystkie etapy tablicy *simplex* są kolejnymi rozwiązaniami dopuszczalnymi pochodzącymi z rozwiązania układu warunków zgodności programu. Z punktu widzenia funkcji celu każdy kolejny etap jest ulepszeniem poprzedniego. Jeśli któryś z kolejnych etapów ulepszyć się już nie da (funkcja celu nie przybiera większych wartości) — etap ten kończy postępowanie *simplex* i stanowi wyraz optymalnego rozwiązania dopuszczalnego.

Po czterech etapach osiągnęliśmy rozwiązanie optymalne, bowiem żadna z wielkości $d_i - c_i$ w czwartej części tablicy *simplex* nie przybiera wartości ujemnych, Rozwiązanie nakazuje wprowadzenie do produkcji trzech upraw: U_1, U_2, U_6, pod które należy przeznaczyć odpowiednio — 31,68 ha, 55,94 ha i 12,37 ha. Jest to jedyne rozwiązanie optymalne (brak zer w wektorach bazy w ostatnim wierszu IV części tablicy *simplex*). Tylko zespół tych trzech upraw zapewnia rozwiązanie optymalne z jednoczesnym pełnym wykorzystaniem czynników produkcji (żadna z wprowadzonych zmiennych sztucznych nie przybrała wartości większych od zera).

W stosunku do tego przykładu należy poczynić następujące uwagi:

1. Współczynniki techniczne, wielkości trzech zmiennych oraz wielkości limitujące czynniki produkcji zostały dobrane celowo, przy czym te ostatnie są wielkościami wynikowymi względem poprzednich wielkości.

2. Nawet jeśli by to nie było wiadomo, z założenia poprzedniego łatwo spostrzec, że niektóre zmienne można by eliminować z programu przed rozwiązaniem, opierając się na analizie dochodowości tych upraw oraz ich współczynników technicznych.

3. Tego typu program i jego rozwiązanie ilustruje możliwości określenia pewnego modelu przedsiębiorstwa rolnego, jego rozmiarów, zapotrzebowania na robociznę i zasoby gotówkowe.

Po rozwiązaniu programu liniowego można zauważyć co następuje i co jest zgodne z ogólnymi uwagami R. G. D Allena na ten temat [1]: mianowicie, jeśli program liniowy jest zapisany w formie równowagi (w naszym przypadku stwierdzamy to *ex post* w odniesieniu do upraw U_1, U_2, U_6), to rozwiązanie całego problemu sprowadza się do rozwiązania danego układu równań i określenia wielkości masy dochodu realizowanego w znalezionym rozwiązaniu. Czyli praktycznie, w naszym przykładzie należałoby przeprowadzić eliminację niektórych zmiennych pozostawiając trzy zmienne i badać, czy one właśnie spełniają równania dając pełne wykorzystanie istniejących zasobów. Jeśli eliminacja wstępna jest trudna, to zabieg można powtarzać wciągając do rownań różne kombinacje upraw z sześciu danych tak długo aż się nie określi czy rozwiązanie względem wybranych trzech zmiennych istnieje czy też nie. Zatem reasumując, jeśli m warunków zgodności programu względem m zmiennych decyzyjnych zapisanych są jako równania, zbędne jest posługiwanie się algorytmem *simplex* i konstruowanie odpowiedniej tablicy *simplex*. Poszukiwanie optymalnego rozwiązania jest zbędne. Jeśli w ogóle istnieje rozwiązanie dopuszczalne, to jest ono jedyne i jako takie daje jedną jedyną masę dochodu. Nie ma więc miejsca na warunek optymalności.

Przyjmując dochodzenie w drodze uproszczeń, bez uszczerbku dla istoty problemu, można abstrahować od teorii zbiorów wypukłych, jej twierdzeń i własności, na których opiera się programowanie liniowe i przedstawić całą rzecz na podstawie algebry elementarnej.

Otóż, jeśli mamy m warunków zgodności programu zapisanych w formie nierówności liniowych (patrz układ 2) i przechodzimy do równoważnego mu układu równań (układ 3) poprzez wprowadzenie zmiennych sztucznych, to w stosunku do tego układu równań można stwierdzić, co następuje:

a. Układ ten może zostać spełniony tylko przez m zmiennych, to jest tyle, ile jest równań, co jest wiadome powszechnie z algebry elementarnej.

b. Ponieważ lista naszych zmiennych zawiera w sobie zarówno zmienne decyzyjne jak i zmienne sztuczne, mogą one występować w różnych kombinacjach ze sobą tworząc zbiór rozwiązań dopuszczalnych, przy czym każde z tych rozwiązań dopuszczalnych składałoby się z m zmiennych. Rozwiązaniem dopuszczalnym może być również zespół zmiennych złożony tylko i wyłącznie ze zmiennych sztucznych, co zresztą znajduje swoje odbicie w I części naszej tablicy *simplex*. Możliwe jest w wyjątkowym przypadku zaistnienie rozwiązania poprzez zespół trzech zmiennych decyzyjnych, co w naszej tablicy znalazło swoje odbicie w IV części.

c. Wprowadzenie algorytmu *simplex* jest podyktowane koniecznością jednoczesnego spełnienia warunku optymalności. Za pomocą algorytmu *simplex* określamy, które z rozwiązań dopuszczalnych daje największą masę dochodu.

[1] R. G. D. Allen, op. cit., s. 684.

Tablica simplex

c_i				32	20	20	18	24	25	0	0	0	x_i
		Wektory	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	x_{ik}
I	0	V_7	100	1	1	1	1	1	1	1	0	0	100
	0	V_8	450	5	3	6	4	8	10	0	1	0	90
	0	V_9	3000	40	25	30	26	28	27	0	0	1	75
		d_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		$d_i - c_i$	—	−32	−20	−20	−18	−24	−25	0	0	0	
II	0	V_7	25	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{40}$	1	0	$-\frac{1}{40}$	$76\frac{12}{13}$
	0	V_8	75	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$	7	$\frac{53}{8}$	0	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{8}$	11,3
	32	V_1	75	1	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{27}{40}$	0	0	$\frac{1}{40}$	37
		d_i	2400	32	20	24	20,8	22,4	21,6	0	0	$\frac{4}{5}$	
		$d_i - c_i$	—	0	0	+4	+2,8	−1,6	−3,4	0	0	$+\frac{4}{5}$	
III	0	V_7	$21\frac{17}{53}$	0	$\frac{101}{265}$	$\frac{37}{265}$	$\frac{83}{265}$	$\frac{-23}{530}$	0	1	$-\frac{13}{265}$	$-\frac{1}{53}$	55,94
	25	V_6	$11\frac{17}{53}$	0	$-\frac{1}{53}$	$\frac{18}{53}$	$\frac{6}{53}$	$\frac{56}{53}$	1	0	$\frac{8}{53}$	$\frac{1}{53}$	−600
	32	V_1	$67\frac{19}{53}$	1	$\frac{165}{265}$	$\frac{138}{265}$	$\frac{152}{265}$	$-\frac{7}{530}$	0	0	$-\frac{27}{265}$	$\frac{2}{53}$	105,3
		d_i	2438,5	32	19,94	25,5	21	26	25	0	0,51	$\frac{39}{53}$	
		$d_i - c_i$	—	0	−0,06	+5,5	+3	+2	0	0	+0,51	$+\frac{39}{53}$	

IV	20	V_2	55,94	0	1	$\frac{37}{101}$	$\frac{83}{101}$	$-\frac{23}{202}$	0	$\frac{265}{101}$	$-\frac{13}{101}$	$-\frac{5}{101}$	
	25	V_6	12,37	0	0	$\frac{1855}{5353}$	$\frac{13}{101}$	$\frac{11289}{10706}$	1	$\frac{5}{101}$	$\frac{15}{101}$	$\frac{106}{5353}$	
	32	V_1	31,68	1	0	$\frac{1537}{5353}$	$\frac{5}{101}$	$\frac{318}{5353}$	0	$-\frac{169}{101}$	$\frac{2}{101}$	$\frac{371}{5353}$	
		d_i	2441,81	32	20	26,3	21,2	25	25	$\frac{17}{101}$	$\frac{51}{101}$	$+\frac{74}{101}$	
		$d_i - c_i$		0	0	+6,3	+3,2	+1	0				

Biorąc pod uwagę stwierdzenia w punkcie **a** i **b** rozwiązanie optymalne zawiera w sobie również co najwyżej *m* zmiennych, zaś konkretne rozwiązanie ujawnia, ile w rozwiązaniu optymalnym występuje zmiennych decyzyjnych, ile zaś sztucznych.

Reasumując całość rozważań opartych, zarówno na teorii zbiorów wypukłych, jak i algebrze elementarnej dochodzimy do wniosku niewątpliwego:

W przedsiębiorstwie rolnym, którego działalność produkcyjna ograniczona jest przez trzy główne czynniki produkcji, tj. ziemię, pracę i kapitał, należy — zakładając dążenie do maksymalizacji dochodu — sprowadzić asortyment produkcji roślinnej do dwóch upraw, przy tym co najmniej jeden z czynników produkcji nie zostanie w pełni wykorzystany.

Teoretycznie możliwe jest osiągnięcie maksymalnego dochodu przez wprowadzenie do produkcji trzech upraw. Jest to jednak przypadek wyjątkowy i bardzo rzadki, możliwy przy zbiegu specjalnych okoliczności. Możliwy jest również przypadek zdegenerowany, również wyjątkowy, tzn. taki, że dochód maksymalny zostanie osiągnięty przez wprowadzenie do produkcji dwóch upraw przy pełnym wykorzystaniu wszystkich czynników produkcji [1].

Tak więc konkurencja między ziemiopłodami o czynniki produkcji sprowadza się ostatecznie do konkurencji między dwiema uprawami.

Niezależnie od udowodnionej teoretycznej prawdziwości tej tezy, należy zdawać sobie sprawę z jej względnego charakteru. Mianowicie, twierdzenie to jest słuszne dla przykładu, gdy konkurencja odbywa się o trzy czynniki produkcji. W praktyce jednak liczba warunków ograniczających działalność produkcyjną gospodarstwa rolnego może być znacznie większa, co w konsekwencji oznacza istnienie większego wachlarza asortymentu produkcji roślinnej. I tak np. siła robocza może być widziana w aspekcie jej sezonowego zużytkowania, a więc jest tu miejsce dla upraw, które są obsługiwane przez siłę roboczą w momencie szczytowych spiętrzeń prac polowych oraz miejsce dla upraw, których zapotrzebowanie na siłę roboczą mieści się w czasie o znacznie słabszym napięciu bilansu siły roboczej. Tak więc możliwość

[1] R. G. D. Allen: Ekonomia Matematyczna, Warszawa 1961 PWN, s. 684.

występowania dużej liczby warunków ograniczających przynosi w konsekwencji możliwość partycypowania w podziale środków produkcji również i przez słabsze konkurencyjnie uprawy.

Względność tej tezy jest również widoczna w momencie przejścia od jej statycznego do dynamicznego ujęcia. W pewnym okresie czasu konkurują ze sobą o podział środków produkcji dwa określone ziemiopłody. Gdy przechodzimy do innego okresu czasu, w którym miały miejsce zmiany w układzie cen oraz zmiany w postępie technicznym, może się zdarzyć, że będą konkurować ze sobą również dwa, lecz już inne od poprzednich ziemiopłody.

Jak wiadomo konkurencja między ziemiopłodami o środki produkcji ma — ogólnie rzecz biorąc — charakter uniwersalny. W ramach zakreślonych jakością gleb ziemia może mieć zastosowanie pod różne uprawy. Jeszcze bardziej pogłębia uniwersalny charakter konkurencji siła robocza, która może obsługiwać procesy produkcyjne wielu upraw. Również zasoby gotówkowe przeznaczone na nakłady materiałowo-pieniężne można w zasadzie przeznaczać na obsłużenie któregokolwiek z ziemiopłodów. Niektóre z podstawowych narzędzi produkcji, w tym mechanizujących pracę również spełniają te same funkcje wobec wielu upraw. Jeśli więc oczywisty jest uniwersalny charakter konkurencji między ziemiopłodami, to czy nie stoi to w jakiejś sprzeczności z twierdzeniem wynikającym z niniejszego opracowania, iż konkurencja między ziemiopłodami o środki produkcji sprowadza się do konkurencji między dwoma ziemiopłodami?

Twierdzenie o uniwersalnym charakterze konkurencji między ziemiopłodami jest oczywiście słuszne z ogólnego punktu widzenia. Gdy jednak twierdzenie to sprowadzić na grunt rzeczywistości, musi ono być widziane w konkretnych warunkach. Zespół tych warunków wydaje się mieć moc ograniczającą ogólność tego twierdzenia, jakkolwiek nie jest w stanie tego twierdzenia podważyć. Gospodarstwo prowadzące działalność produkcyjną dąży do osiągnięcia maksymalnego dochodu, przy tym dążenie to ograniczone jest faktem występowania naturalnych limitów środków produkcji. Gospodarstwo posiada określony areał uprawny, określony potencjał siły roboczej i również pewien określony potencjał kapitałowy. Zespół powyższych w warunkach działalności produkcyjnej wyłania więc z siebie zespół kryteriów, w ramach których należy widzieć problem uniwersalnego charakteru konkurencji między ziemiopłodami. Z zasady dążenia do maksymizacji dochodu wynika pośrednio kryterium opłacalności, z warunków ograniczających to dążenie wynikają kryteria dodatkowe w postaci tzw. współczynników technicznych (pracochłonności i kapitałochłonności poszczególnych upraw). Gdyby występowało tylko główne kryterium opłacalności nieograniczane istnieniem kryteriów dodatkowych, działalność produkcyjna gospodarstwa w zakresie produkcji roślinnej sprowadziłaby się do produkcji jednego tylko najbardziej opłacalnego ziemiopłodu. Byłaby nim ta uprawa, której miejsce w układzie cen i relacji cen gwarantowałoby gospodarstwu rentowną działalność produkcyjną. W warunkach działania wszystkich wymienionych kryteriów sprawa przedstawia się inaczej. Jeśli nie można ograniczyć się do produkcji jednego tylko ziemiopłodu, to jaka jest górna granica liczebności upraw, których zespół zapewnia gospodarstwu osiągnięcia maksmalnego dochodu? Jest to jednak pytanie postawione na początku niniejszego opracowania.

Spójrzmy na tablicę *simplex* adaptowaną do naszego badania jak na

pole bitwy, na którym toczy się walka konkurencyjna między ziemiopłodami. Z konstrukcji tej wynika jasno jej związek z uniwersalnym charakterem konkurencji. Faktem jest, że w tablicę *simplex* wprowadzamy wszystkie dopuszczalne w danym gospodarstwie ziemiopłody, co jest niczym innym jak metodologicznym uznaniem uniwersalnego charakteru konkurencji. Na tak skonstruowanym polu bitwy każda z upraw konkuruje z każdą uprawą. Walka ta odbywa się z taką siłą, w jaką wyposaża każdą z upraw kryterium opłacalności i dodatkowe kryteria ekonomiczno-techniczne. Poszczególne etapy tej tablicy odzwierciedlają proces wzajemnego wypierania się poszczególnych upraw konkurujących ze sobą. Każdy etap przynosi rozwiązanie polegające na wyeksponowaniu tych upraw, które dominują nad pozostałymi indywidualną krańcową efektywnością funkcji celu, tj. funkcji maksymalnego dochodu.

Ostatni etap, gwarantujący osiągnięcie maksymalnego dochodu, przynosi wskazanie, które z upraw należy wprowadzić do produkcji, by osiągnąć dochód maksymalny. Wskazanie to ogranicza się do dwóch upraw, co wynika wprost z elementarnych praw matematycznych. Etap ten jest odzwierciedleniem faktu, że z wielu konkurujących ze sobą ziemiopłodów tylko dwie uprawy (jeśli nie zachodzi przypadek wyjątkowy) pretendują o podział dyspozycyjnych środków produkcji. Tak więc z procesu walki konkurencyjnej o charakterze powszechnym wyszły zwycięsko tylko dwie uprawy, których siła konkurencyjna okazała się dominującą nad siłą konkurencyjną pozostałych upraw. Mówiąc inaczej — od twierdzenia, że każda uprawa konkurencyjna z każdą, przechodzimy do twierdzenia, że ostatecznie konkuruje ze sobą ta para upraw, która aktualnie okazała się najsilniejsza.

Zatem, stojąc na gruncie uznającym uniwersalny charakter konkurencji między ziemiopłodami i wobec konieczności wyboru opłacalnych kierunków produkcji roślinnej dochodzimy do odpowiedzi na pytanie początkowe. Odpowiedź na to pytanie, polegająca na stwierdzeniu, że w ostatecznym rachunku konkurencja między ziemiopłodami sprowadza się do konkurencji między dwoma ziemiopłodami nie nosi cech sprzeczności z twierdzeniem o uniwersalnym charakterze konkurencji. Przy całej ogólności tego twierdzenia jest miejsce na twierdzenie konkretne, zależne od wskazanych wyżej warunków. O ile w początkowym stadium procesu walki konkurencyjnej twierdzenie to w całej rozciągłości znajduje swój wyraz, o tyle w końcowym stadium tej walki zostaje ogólność tego twierdzenia skonkretyzowana.

W literaturze ekonomicznej znajdujemy momenty hipotetycznych stwierdzeń, analogicznych do postawionego w tym opracowaniu. Mówi o tym np. G. Weinschenck [1] w sposób następujący: „Gdy chodzi o obsianie pewnej określonej powierzchni uprawnej, wiele różnorodnych możliwości można zawsze zredukować do dwóch i ostatecznie pozostaje tylko alternatywa między dwiema uprawami". Wypowiada się również na ten temat M. Pohorille [2] dają pewną próbę weryfikacji matematycznej tego twierdzenia. Weryfikacja ta nie jest jednak pełna, gdyż dotyczy przypadku, gdy konkurencja odbywa się tylko o dwa środki produkcji, tj. ziemię

[1] G. Weinschenck: Zur Theorie und Praxis der Kalkulation in landwirtschaftlichen Betrieb, Berichte Ueber die Landwirtschaft, Band XXX 1956, Heft 4, Seite 565.

[2] M. Pohorille: Zagadnienia badań nad opłacalnością produkcji w spółdzielniach produkcyjnych, Ekonomista nr 4/1956.

i pracę. W opracowaniu niniejszym przeprowadzono w oparciu o teorię programowania liniowego matematyczną weryfikację tych hipotez w odniesieniu do wszystkich trzech warunków ograniczających, tj. przy założeniu, że ma miejsce konkurencja o trzy środki produkcji: ziemię, pracę i kapitał.

Porządkując, można pokusić się o danie następującego obrazu wszystkich możliwych dróg rozwiązania tego problemu. Są to: 1) dedukcyjna — hipotetyczna, 2) algebra elementarna, 3) geometryczno-graficzna, 4) algebra macierzowa, 5) teoria i metody programowania liniowego.

W niniejszym opracowaniu przeprowadzono rozważania na podstawie algebry elementarnej i teorii programowania liniowego. W opracowaniu poprzednim przeprowadzono próbę rozwiązania problemu konkurencji między ziemiopłodami w oparciu o metodę geometryczno-graficzną. Nie wykorzystano w żadnym z opracowań metody algebry macierzowej, jakkolwiek uznać ją należy za równorzędne narzędzie poznawcze przy badaniu tego problemu.

Można zapytać, czy abstrahując od wykorzystanych już możliwości można by ograniczyć się do rozważań dedukcyjnych w zakresie badania konkurencji między ziemiopłodami? Jedno jest pewne, stojąc na gruncie analizy tylko współczynników dochodowości i współczynników technicznych, można zakreślić ogólne granice, w których mieści się liczba upraw wybranych do produkcji. Wiadomo, że z racji istnienia ograniczonych zasobów środków produkcji, nie można sprowadzić liczby upraw do jednej. Z drugiej strony wiadomo też, że z tej samej ograniczoności rozmiarów środków produkcji wynika, iż liczba upraw ewentualnie wchodzących w skład kombinacji zapewniającej osiągnięcia maksymalnego dochodu nie może być nieograniczona, wręcz przeciwnie, musi być ona poważnie zredukowana względem dopuszczalnych w danym gospodarstwie upraw. Pozostaje więc tylko kwestia stopnia tej redukcji.

Jeśli punktem wyjścia rozważań dedukcyjnych uczynić listę współczynników dochodowości uporządkowaną w kierunku malejącym, to wybierając z tej listy kolejne uprawy spostrzegamy, że wiąże się to z dwiema konsekwencjami.

a. Każdorazowe wprowadzenie nowej uprawy wydaje się przynosić w efekcie coraz to mniejsze przyrosty masy dochodu. Dzieje się tak dlatego, że wprowadzając nową uprawę, ograniczamy zasięg uprawy uprzednio wprowadzonej, zyskując w efekcie tylko różnicę masy dochodu osiąganej z nowej uprawy kosztem tego co daje redukcja masy dochodu z uprawy ograniczanej a wprowadzonej uprzednio. Ponieważ wprowadzamy kolejno uprawy o coraz to mniejszym współczynniku dochodowości, zatem różnice między tym co zyskujemy a tym co tracimy są coraz to mniejsze, a więc przyrosty masy dochodu są również coraz to mniejsze. Sięganie zatem po coraz to nową uprawę wydaje się być coraz to mniej korzystne. Można przypuszczać, że zwolna zbliżamy się do tej krytycznej granicy, sięgnięcie poza którą jest już nieopłacalne, tzn. nie przynosi żadnej dodatniej zmiany w stosunku do już osiągniętej masy dochodu. Jak określić, zlokalizować tę krytyczną granicę?

b. Zauważmy, że wprowadzenie jednej uprawy, pierwszej z listy malejących współczynników dochodowości gwarantuje pełne wykorzystanie co najwyżej jednego środka produkcji. Pozostają dwa niewykorzystane. Próba ich wykorzystania łączy się z wprowadzeniem następnej uprawy.

Wprowadzenie jej sprawia, że obie uprawy łącznie wykorzystują w pełni dwa środki produkcji. Trzeci pozostaje niewykorzystany. A więc ostatecznie, gdyby nawet okazało się, że wpowadzenie trzeciej uprawy dla wykorzystania pełnego również trzeciego środka produkcji jest opłacalne, tzn. zapewnia jakiś minimalny nawet przyrost masy dochodu, to właśnie ta trzecia uprawa stanowiłaby tę krytyczną granicę liczebności upraw. Jednak jest wyraźnie wyczuwalne, że ta trzecia uprawa ma najmniejsze możliwości wejścia w istniejący już układ względem dwóch pierwszych upraw. Musiałaby panować idealna harmonia między współczynnikami technicznymi tych trzech upraw, by wystarczało na nie dokładnie wszystkich pełnych zasobów środków produkcji. Taką idealną harmonię spotkać można bardzo rzadko i na ogół tylko dwie uprawy wyczerpują wszystkie możliwości rozwiązań pozwalające na pełne wykorzystanie dwóch czynników produkcji, przy trzecim niewykorzystanym.

Rozumowanie powyższe wydaje się być wystarczająco logiczne, by na jego podstawie wysnuć wniosek hipotetyczny o sprowadzeniu konkurencji między wieloma ziemiopłodami do konkurencji między dwoma. Zauważmy jednak przy tym, że rozumowanie to, nawet w tym dość grubym zarysie, stanowi kanwę, na której zakładając oczywiście konieczność dostatecznie wysokiej precyzji, rozwija się teoria i metoda programowania liniowego. Zupełnie pewne jest, że rozumowanie to, dostatecznie pogłębione i poparte odpowiednim rachunkiem, prowadzi wprost do konstrukcji tablicy *simplex*.

АЛИЦИЯ КАШУБА-ЦИБУРА
Научно-исследовательский институт
экономики сельского хозяйства
Варшава

ПО ВОПРОСУ КОНКУРЕНЦИИ МЕЖДУ КУЛЬТУРАМИ (Ч. II)

Содержание

Статья является попыткой использования теории линейного программирования и метода симплекс в исследовании проблемы конкуренции между сельскохозяйственными культурами. В то же время она является дальнейшим углублением той же проблемы рассматриваемой автором раньше с применением графически-геометрчиеского метода. В этой статье, как и в прежней, доказано тезис, что конкуренция между сельскохозяйственными культурами сводится в конечном счете к конкуренции между двумя культурами. Выясняется также вопрос связи этого тезиса с утверждением об универсальном характере конкуренции между культурами. В статье проводятся рассуждения дедуктивного характера, показывающие генезис гипотеза о возможности выразить конкуренцию между культурами при помощи связи между двумя клуьтурами.

ALICJA KASZUBA-CYBURA
Institute of Agricultural Economics
Warsaw

ABOUT COMPETITION AMONG CROPS (PART II)

Summary

The work presents an attempt of applying the theory of linear programming and the simplex method to the studies on the problem of the competition between crops. At the same time it may be considered a contribution to deepen the problem which has been dealt by the author earlier, having used the geometric-diagram method. In the work, like in the preceding one, the thesis has been proved that competition among crops would be reduced in the last account to the competition between two crops. Also the problem of the relation of the theory in question to the assumption on the universal character of crops competition has been explained. The report deals with the deductive consideration showing the genesis of hypothesis on the possibility to reduce the competition among crops to only two ones.