JANINA BOHDANOWICZ-GROCHOWSKA
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Warszawa

ZASTOSOWANIE RACHUNKU TABLICOWEGO DO OBLICZANIA CZĘŚCIOWYCH SUBSTYTUCJI

Tablicą liczbową (inaczej: macierzą albo matrycą) nazywamy zbiór liczb ustawionych w prostokąt.

Prostokąt liczb tworzących tablicę ujmujemy w kwadratowe klamry. Liczby tworzące tablicę nazywamy elementami tej tablicy. Elementy tablicy stojące obok siebie w poziomie tworzą tzw. wiersze tablicy, elementy zaś stojące w tym samym pionie tworzą kolumny tablicy.

Na przykład tablica

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & -8 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

posiada 15 elementów. Jest to tablica o 3 wierszach i 5 kolumnach.

Ogólnie: każda tablica posiada całkowitą ilość $m \geqslant 1$ wierszy i całkowitą ilość $n \geqslant 1$ kolumn.

Tablica m — wierszowa i n — kolumnowa posiada $m \cdot n$ elementów.

W ogólnym zapisie elementy tablicy oznacza się literami z dwoma wskaźnikami u dołu. Pierwszy wskaźnik jest numerem wiersza, w którym znajduje się dany element, drugi wskaźnik numerem kolumny. Tak więc element a_{ij} znajduje się w i-tym wierszu i w j-tej kolumnie, tzn. leży na przecięciu się i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Wskaźniki i przebiegają liczby od 1 do m ($i = 1, 2, \ldots m$), wskaźnik j — od 1 do n ($j = 1, 2, \ldots n$).

Piszemy więc ogólnie (bez podawania konkretnych wartości elementów tablicy):

$$[a_{mn}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2j} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots a_{mj} \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Symbolicznie tablicę liczbową oznaczamy przez $[a_{ij}]$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$),

W szczególności np. tablica dwukolumnowa i czterowierszowa ma ogólną postać:

$$[b_{42}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$$

zaś tablica trójwierszowa i jednokolumnowa ma ogólną postać:

$$[c_{31}] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

Uwaga: tablicę jednokolumnową nazywa się niekiedy wektorem, a poszczególne (jednoelementowe) wiersze tej tablicy — współrzędnymi tego wektora.

W rachunku tablicowym określa się przede wszystkim porównywanie tablic, a następnie takie działania na tablicach, jak mnożenie tablicy przez liczbę, dodawanie tablic oraz mnożenie tablic.

Dodajmy tu jeszcze, że prostokątowi liczb tworzącemu tablicę nie przypisuje się żadnej wartości liczbowej (nie należy mylić z wyznacznikiem).

Porównywanie tablic

Porównywać można tylko tablice o tej samej ilości wierszy i tej samej ilości kolumn.

Dwie tablice m-wierszowe i n-kolumnowe są sobie równe, jeżeli równe są wszystkie ich odpowiadające sobie elementy (tzn. elementy o tej samej uporządkowanej parze wskaźników).

Tak więc równość dwu m-wierszowych i n-kolumnowych tablic oznacza $m \cdot n$ równości odpowiadających sobie elementów tych tablic.

Np.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

oznacza, że:

$$\begin{matrix} a_{11} = b_{11}, & a_{12} = b_{12}, & a_{13} = b_{13}, \\ a_{21} = b_{21}, & a_{22} = b_{22}, & a_{23} = b_{23}. \end{matrix}$$

Mnożenie tablicy przez liczbę

Mnożąc tablicę przez liczbę należy każdy element tej tablicy pomnożyć przez tę liczbę (a więc nie tak jak w teorii wyznaczników, gdzie przez liczbę mnoży się jedynie elementy jednego wiersza lub jednej kolumny). Na przykład:

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{bmatrix}$$

Dodawanie tablic

Dodawać można do siebie dwie tablice o jednakowej ilości wierszy i o jednakowej ilości kolumn.

W wyniku otrzymuje się tablicę o takiej samej ilości wierszy i kolumn, jak tablice dodawane, o elementach będących sumami odpowiednich elementów dodawanych tablic.

Przykład:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix}$$

Mnożenie tablic

Tablicę $[a_{ij}]$ można mnożyć przez tablicę $[b_{jk}]$ tylko w tym przypadku, gdy druga z tych tablic (mnożnik) ma tyle wierszy, co pierwsza (mnożona) kolumn.

A więc np. tablicę trójkolumnową (o dowolnej ilości wierszy) można mnożyć jedynie przez tablicę trójwierszową (o dowolnej ilości kolumn).

Stąd od razu widać, że mnożenie tablic nie jest przemienne; nie można zamienić mnożnej i mnożnika, tak jak w zwykłym iloczynie liczbowym.

Iloczyn tablicy $[a_{ij}]$ przez tablicę $[b_{jk}]$ (tablica $[b_{jk}]$ ma tyle wierszy, co tablica $[a_{ij}]$ kolumn) jest tablica $[c_{ik}]$ posiadająca tyle wierszy, co tablica $[a_{ij}]$ i tyle kolumn, co tablica $[b_{jk}]$. Elementami tablicy $[c_{ik}]$ są liczby będące tzw. iloczynami skalarnymi[1] odpowiednich wierszy tablicy $[a_{ij}]$ przez kolumny tablicy $[b_{jk}]$. A więc element c_{ik} jest iloczynem skalarnym i-tego wiersza tablicy $[a_{ij}]$ przez k-tą kolumnę tablicy $[b_{jk}]$.

Przykład. Jeżeli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

to elementy c_{ik} $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2)$ tablicy $[c_{ik}]$ wyrażają się w sposób następujący:

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} + a_{14} b_{41} \\ c_{21} &= a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} + a_{24} b_{41} \\ c_{31} &= a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} + a_{33} b_{31} + a_{34} b_{41} \\ c_{12} &= a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} + a_{14} b_{42} \\ c_{22} &= a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} + a_{24} b_{42} \\ c_{32} &= a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} + a_{33} b_{32} + a_{34} b_{42} \end{aligned}$$

W przykładzie tym mnożna ma cztery kolumny a mnożnik cztery wiersze, mnożenie jest więc wykonalne. Iloczyn jest tablicą o trzech wierszach (bo trzy wiersze ma mnożna) i o dwu kolumnach (bo dwie kolumny ma mnożnik).

Pierwszą kolumnę tablicy $[c_{ik}]$ otrzymaliśmy mnożąc skalarnie wiersze mnożnej przez pierwszą kolumnę mnożnika, drugą kolumnę tworzą iloczyny skalarne wierszy mnożnej przez drugą kolumnę mnożnika.

Przykład liczbowy.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ -18 & -5 \end{bmatrix}$$

W przykładzie tym mnożymy najpierw skalarnie pierwszy wiersz mnożnej przez pierwszą kolumnę mnożnika otrzymując pierwszy element pierwszej kolumny tablicy będącej iloczynem. Następnie mnożąc drugi wiersz przez pierwszą kolumnę otrzymujemy drugi element pierwszej kolumny iloczynu.

Podobnie mnożąc odpowiednio pierwszy i drugi wiersz mnożnej przez drugą kolumnę mnożnika otrzymujemy kolejno pierwszy i drugi element drugiej kolumny iloczynu.

Zastosowanie teorii rachunku tablicowego do równań liniowych

Weźmy następujący układ równań liniowych:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 &= b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 &= b_3 \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

Zauważmy, że układ ten możemy przedstawić w postaci jednego równania rachunku tablicowego:

[1] Iloczynem skalarnym dwu ciągów liczbowych o jednakowej ilości wyrazów nazywamy sumę iloczynów kolejnych wyrazów tych ciągów. Np.
$(a_1, a_2, a_3 \ldots a_k) \cdot (b_1, b_2, b_3 \ldots b_k) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_k b_k.$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Mnożąc bowiem tablice po lewej stronie znaku równości otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Porównując otrzymane tablice wracamy do wyjściowego układu równań. Okazuje się, że dowolny układ równań liniowych można przedstawić za pomocą jednego równania tablicowego.

Zwracamy jednak uwagę na to, że tablicowy zapis układu równań liniowych nie podaje i nie upraszcza w niczym sposobu rozwiązania tego układu. Chcąc rozwiązać układ równań liniowych zapisany tablicowo musimy stosując definicję porównywania tablic wrócić do zapisu zwykłego i rozwiązać układ zwyczajnie metodą Cramera, czy metodą kolejnych eliminacji zmiennych. Po co zatem stosuje się tablicowy zapis układu równań liniowych? Idzie tu o to, że przy zapisie tablicowym, stosując wzory rachunku tablicowego, można dokonywać pewnych przekształceń układu równań i uzyskiwać pewne wyniki bez rozwiązywania samego układu. Przykładem takich działań jest stosowane w programowaniu liniowym uzyskiwanie rozwiązań układów wieloznacznie rozwiązanych, spełniających pewne z góry założone warunki.

Jako przykład stosowania rachunku tablicowego omówimy metodę częściowych substytucji pasz podstawowych przez uzupełniające składniki paszowe, przy ustalaniu dziennych racji paszowych podaną w pracy Kastena i Kreutzbergera [2].

W pracy tej autorzy ustalają dzienne racje paszowe przy wypasie młodych buhajków mając do dyspozycji 15 składników paszowych. Tu weźmiemy pod uwagę tylko 6 rodzajów pasz i ustalając dzienną rację paszową z nich złożoną, omówimy sposób posługiwania się rachunkiem tablicowym w podanej przez autorów metodzie substytucji częściowych.

Sformułowanie zagadnienia

Przyjmujemy, że dzienne zapotrzebowanie pokarmowe zwierząt (opasane buhajki w wieku 8—10 miesięcy) wynosi:

jednostek pokarmowych (S)	— 3300
strawnego białka (E)	— 660 g
suchej masy pokarmowej (T)	— 6000 g

Zapotrzebowanie to ma być pokryte następującymi, będącymi do dyspozycji składnikami paszowymi:

Pasze	Zawartość pokarmowa w 1 kg		
	S	E	T
f_1 — kiszone liście buraczane	89	14	180
f_2 — śruta owsiana	636	88	884
f_3 — otręby żytnie	42	11	85
f_4 — śruta jęczmienna	709	80	859
f_5 — śruta rzepakowa poekstrakcyjna	535	301	891
f_6 — słoma pastewna (jara)	180	8	850

Dzienna racja paszowa jest sumą niewiadomych ilości $x_1, x_2, \ldots, x_6$ poszczególnych składników paszowych (w kg).

Porównując zawartość składników pokarmowych S, E i T w racji dziennej z zapotrzebowaniem na te składniki otrzymujemy układ trzech równań z sześcioma niewiadomymi:

$$
\begin{array}{lr}
(1) & 89\,x_1 + 636\,x_2 + 42\,x_3 + 709\,x_4 + 535\,x_5 + 180\,x_6 = 3\,300 \\
 & 14\,x_1 + 88\,x_2 + 11\,x_3 + 80\,x_4 + 301\,x_5 + 8\,x_6 = 660 \\
 & 180\,x_1 + 884\,x_2 + 84\,x_3 + 859\,x_4 + 891\,x_5 + 850\,x_6 = 6\,000
\end{array}
$$

Układ ten zapisujemy w postaci jednego równania tablicowego:

$$
(2)\quad \begin{array}{c}
\\ S \\ E \\ T
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 89 & 636 & 42 & 709 & 535 & 180 \\ 14 & 88 & 11 & 80 & 301 & 8 \\ 180 & 884 & 84 & 859 & 891 & 850 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\,300 \\ 660 \\ 6\,000 \end{bmatrix}
$$

Powyższy układ równań jest rozwiązalny wieloznacznie, ponieważ niewiadomych jest więcej niż równań.

Ogólnie biorąc wartości trzech spośród sześciu występujących tu niewiadomych możemy przyjąć dowolnie, a dopiero potem obliczyć pozostałe trzy niewiadome.

Trzy składniki paszowe, których wartości wyznaczają równania (1), po przyjęciu trzech pozostałych dowolnie, nazywamy składnikami podstawowymi; składniki zaś, których ilości przyjmuje się dowolnie nazywamy uzupełniającymi.

W praktyce idzie o to, aby ustalić racje dzienne złożone ze składników podstawowych (składniki, których mamy duże ilości do dyspozycji) i ewentualnie tylko częściowo zastępować je składnikami uzupełniającymi ze względów fizjologicznych.

Przedstawienie w postaci tablicowej metody częściowych substytucji pozwala uniknąć powtarzania dosyć długich rachunków.

Metoda częściowych substytucji

Obieramy składniki np. f_1, f_2, i f_3 jako podstawowe i obliczamy najpierw ich ilości przy karmieniu tylko nimi. Rozwiązujemy w tym celu układ równań (1) przyjmując $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, tzn. układ:

$$
(3)\quad \begin{bmatrix} 89 & 636 & 42 \\ 14 & 88 & 11 \\ 180 & 884 & 84 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\,300 \\ 660 \\ 6\,000 \end{bmatrix}
$$

Wymnażając tablice po lewej stronie otrzymujemy w zwykłym zapisie układ trzech równań z trzema niewiadomymi x_1, x_2 i x_3. Rozwiązując ten układ otrzymujemy następujące wartości niewiadomych:

$$
(4)\quad \begin{aligned} x_1 &= 8\,523 \text{ kg} \\ x_2 &= 1\,590 \text{ kg} \\ x_3 &= 36\,431 \text{ kg} \end{aligned}
$$

Powyższe wartości pasz f_1, f_2 i f_3 pokrywają całkowicie zapotrzebowanie zwierząt na składniki pokarmowe *S*, *E* i *T*.

Jeżeli teraz chcemy dodać do racji dziennej pewne ilości pozostałych f_4, f_5 i f_6 pasz uzupełniających, to ilości pasz podstawowych należy odpowiednio zmienić, ażeby racja dzienna nie zawierała więcej składników pokarmowych niż to jest konieczne.

Obliczamy kolejno wielkości częściowego zastępowania (substytucji) pasz podstawowych przez 1 kg każdej z pasz uzupełniających.

Dla ustalenia np. substytucji pasz podstawowych przez 1 kg paszy f_4 przyjmujemy w układzie (1) $x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = 0$.

Otrzymujemy układ równań:

$$
(5)\quad \begin{aligned} 89\,x_1 + 636\,x_2 + 42\,x_3 + 709 &= 3\,300 \\ 14\,x_1 + 88\,x_2 + 11\,x_3 + 80 &= 660 \\ 180\,x_1 + 884\,x_2 + 84\,x_3 + 859 &= 6\,000 \end{aligned}
$$

Układ ten spełniają wartości:

$$(6)\quad \begin{aligned} x_1 &= 9{,}296 \text{ kg} \\ x_2 &= 0{,}153 \text{ kg} \\ x_3 &= 39{,}668 \text{ kg} \end{aligned}$$

Porównując otrzymane wartości z wielkościami (4) widzimy, że substytucje pasz podstawowych przez 1 kg pasz f_4 są równe:

$$(7)\quad \begin{aligned} \triangle x_1 &= 0{,}773 \text{ kg} \\ \triangle x_2 &= -1{,}437 \text{ kg} \\ \triangle x_3 &= 3{,}237 \text{ kg} \end{aligned}$$

Dodając zatem 1 kg paszy f_4 musimy zwiększyć ilość paszy f_1 o 0,773 kg, zmniejszyć ilość paszy f_2 o 1,437 kg i zwiększyć ilość paszy f_3 o 3,237 kg.

Przyjmując w układzie (1) $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ i $x_6 = 0$ oraz $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ i $x_6 = 1$, otrzymujemy podobnie substytucje pasz podstawowych przez 1 kg paszy f_5 oraz f_6.

$$(8)\quad \begin{aligned} \triangle x_1 &= 20{,}292 \text{ kg} \\ \triangle x_2 &= -0{,}357 \text{ ,,} \\ \triangle x_3 &= -50{,}336 \text{ ,,} \end{aligned}$$

$$(9)\quad \begin{aligned} \triangle x_1 &= -14{,}244 \text{ ,,} \\ \triangle x_2 &= 1{,}189 \text{ ,,} \\ \triangle x_3 &= 7{,}885 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Układamy teraz równanie tablicowe, z którego oblicza się substytucje pasz podstawowych przez dowolne ilości x_4, x_5 i x_6 pasz uzupełniających f_4, f_5 i f_6.

$$(10)\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}523 \\ 1{,}590 \\ 36{,}431 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 0{,}773 & 20{,}292 & -14{,}244 \\ -1{,}437 & -0{,}357 & 1{,}189 \\ 3{,}237 & -50{,}336 & 7{,}885 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \right\}$$

Przyjmując w tym równaniu dowolnie wartości x_4, x_5 i x_6 składników uzupełniających (w kg), otrzymujemy ilości x_1, x_2 i x_3 składników podstawowych w racji dziennej.

Należy tu oczywiście brać tylko takie wartości składników uzupełniających, aby ilości pasz podstawowych były dodatnie.

Przykład.

Dodając $x_4 = 0{,}25$ kg, $x_5 = 0{,}15$ kg i $x_6 = 1{,}0$ kg do składników podstawowych f_1, f_2, f_3, wartości x_1, x_2, x_3, tych ostatnich obliczamy, jak następuje z układu (10):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}523 \\ 1{,}590 \\ 36{,}431 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 0{,}773 & 20{,}292 & -14{,}244 \\ -1{,}437 & -0{,}357 & 1{,}189 \\ 3{,}237 & -50{,}336 & 7{,}885 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}5 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} \right\}$$

Wykonujemy mnożenie tablicowe w nawiasie:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}523 \\ 1{,}590 \\ 36{,}431 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}773 \cdot 0{,}25 + 20{,}292 \cdot 0{,}15 - 14{,}244 \cdot 1{,}0 \\ -1{,}437 \cdot 0{,}25 - 0{,}357 \cdot 0{,}5 + 1{,}189 \cdot 1{,}0 \\ 3{,}237 \cdot 0{,}25 - 50{,}336 \cdot 0{,}5 + 7{,}885 \cdot 1{,}0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}523 \\ 1{,}590 \\ 36{,}431 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3{,}905 \\ +0{,}652 \\ -16{,}474 \end{bmatrix}$$

Sumujemy tablice:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}618 \\ 2{,}242 \\ 19{,}957 \end{bmatrix}$$

Porównując te tablice otrzymujemy:

$$x_1 = 4{,}618 \text{ kg}$$
$$x_2 = 2{,}242 \text{ ,,}$$
$$x_3 = 19{,}957 \text{ ,,}$$

Widzimy więc, że rachunki prowadzące do ustalenia racji dziennych metodą częściowych substytucji są dosyć proste.

LITERATURA

1. Stark Marceli. Geometria analityczna. PWN 1951.
2. Armin Kasten und Ortwin Kreutzberger. Mathematische Planung in der Futterwirtschaft. (Artykuł ten w tłumaczeniu polskim publikowany jest w niniejszym numerze „Zagadnień" — red.).